Matemáticas 6º

MATEMATICAS

CONSTANTINO MARCOS, S. M.
LICENCIADO EN CIENCIAS FISICAS

JACINTO MARTINEZ, S. M.
DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

MATEMATICAS

SEXTO CURSO

Aprobado el 23-II-68.
B. O. M. de E. y C. de 7-III-68.

1973

EDICIONES S. M.
General Tabanera, 39
MADRID-25

Edita: EDICIONES S. M.
Con las debidas licencias.
Derechos reservados.
Depósito legal: M. 30135 - 1973.
I. S. B. N. 84-348-0489-1.
IMPRESO EN ESPAÑA - *Printed in Spain.*

IMPRENTA S. M. • General Tabanera, 39 • MADRID - 25

PROLOGO

Al escribir este libro hemos procurado que la teoría y la práctica fueran siempre hermanadas, para que los conocimientos adquiridos por el alumno queden perfectamente consolidados antes de avanzar un paso más en su estudio.

Creemos que la doctrina está expuesta con sencillez, claridad y concisión, al mismo tiempo que se atiende con rigor a su carácter formativo. Por estas cualidades esperamos que los alumnos adquirirán con facilidad y eficacia estos conocimientos que tan útiles les han de ser en estudios posteriores.

El método seguido requiere ir despacio, ya que la resolución de los ejercicios pide mucho tiempo. Pero al final del curso los alumnos que lo sigan tendrán la confianza de que poseen la doctrina en él contenida y habrán adquirido una práctica muy estimable en la resolución de problemas a ella referentes.

Los problemas se colocan al fin de cada lección para que no se pase a la siguiente sin haber asegurado y contrastado la teoría mediante la práctica, y son abundantes y variados para que se dé a ésta toda la importancia que merece.

En este libro de Sexto Curso, último del Bachillerato, hemos procurado dar a los alumnos una idea sucinta y clara, pero sustanciosa, de temas que la experiencia nos ha enseñado les resultan tan interesantes, como la Geometría Analítica y la Teoría de funciones. Particular relieve hemos dado al problema de la tangente, origen del cálculo diferencial y de tan fecundas aplicaciones.

Y porque la práctica diaria de la clase nos ha enseñado que los muchachos asimilan los conocimientos matemáticos tanto mejor cuanto

con menos palabras se les expongan, con tal que ellas sean las suficientes, nos hemos esforzado en lograr la máxima concisión compatible con la claridad.

Al cumplirse los cinco años de la anterior aprobación, y habiendo debido presentarla de nuevo, nos hemos visto obligados a introducir algunas notables modificaciones en esta nueva edición, particularmente en lo referente al estudio de los números reales y de la Geometría Analítica, que hacemos de acuerdo con las nociones de Matemática Moderna y de Cálculo Vectorial introducidas en nuestras Matemáticas de Quinto Curso.

Terminamos agradeciendo a cuantos han intervenido con sus consejos para que este libro saliera menos imperfecto. Damos las gracias más cordiales en especial a don José Luis Sánchez Martín por su importante colaboración en la redacción de este libro.

LOS AUTORES

INDICE

	Págs.
Prólogo	7
1.—Sucesiones de números racionales	11
2.—Los números reales	27
3.—El plano vectorial	36
4.—El plano afín	46
5.—Problemas de incidencia, alineación y paralelismo	55
6.—El plano métrico	61
7.—Ecuación normal de la recta	71
8.—Funciones de variable real	82
9.—Cálculo de límites indeterminados	92
10.—Continuidad de funciones	96
11.—Derivada de una función	110
12.—Derivación de las funciones algebraicas	116
13.—Aplicaciones geométricas de la derivada	128
14.—Derivación de las funciones logarítmica y exponencial	134
15.—Derivación de las funciones goniométricas	147
16.—Máximos y mínimos relativos	154
17.—Trazado de curvas	166
18.—Otras aplicaciones de las derivadas	175
19.—Estudio analítico de la circunferencia	181
20.—La elipse	192
21.—La hipérbola	202
22.—La parábola	214
23.—Integrales indefinidas	220
24.—Integrales definidas	230
25.—Otras aplicaciones del cálculo integral	240

1

Sucesiones de números racionales

1. Sucesivas ampliaciones del concepto de número.—Desde la más remota antigüedad, los hombres manejaron los *números naturales,* que indican el número de objetos de un conjunto, como cuando decimos hay 20 alumnos en clase. Pero vieron que con los números naturales no siempre eran posibles la sustracción y la división. En la sustracción, por ejemplo, no puede restarse un número de otro menor. En la división un número solo puede dividirse por otro si el primero es múltiplo del segundo.

Para hacer posibles estas dos operaciones se introdujeron los *números enteros,* que comprenden como caso particular a los naturales, y los *números racionales,* que comprenden como caso particular a los enteros. Se tiene así el siguiente cuadro:

Números racionales { *enteros* { positivos: *naturales* / negativos } / *fraccionarios* { positivos / negativos } }

El número racional puede expresarse como el *cociente de dos enteros,* y también como *número decimal, con infinitas cifras decimales que se repiten en períodos.* Así.

$$\frac{3}{4} = 0{,}75000\ldots \quad ; \quad \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$$

Esto nos sugiere que la sucesión de números racionales

$$0{,}1,\ 0{,}16,\ 0{,}166,\ 0{,}1666,\ 0{,}16666,\ \ldots$$

tiende al número racional 1/6.

2. El problema de la medida y el número racional.—El número fraccionario tuvo su origen histórico en el problema de la medida de magnitudes, como longitudes, áreas, volúmenes, pesos, etc. Para medir, por ejemplo la longitud de un segmento MN, se compara con otro segmento OU que se toma como unidad.

Puede suceder que MN contenga a OU un número entero de veces, por ejemplo 7 veces. Entonces la medida de MN es 7 unidades, o sea

$$\overline{MN} = 7 \cdot \overline{OU}$$

Puede ocurrir también que MN no contenga un número exacto de veces a OU, pero sí a una de las partes iguales en que puede dividirse OU. Supongamos que dividiendo éste en 6 partes iguales, cada una de dichas partes quede contenida 43 veces en el segmento MN. En este caso la medida de MN es el número fraccionario 43/6, o sea

$$\overline{MN} = \frac{43}{6}\,\overline{OU}$$

En ambos casos el segmento MN se llama *conmensurable* con la unidad elegida.

Puede acontecer finalmente que, como se va a demostrar en el número siguiente, el segmento MN no contenga un número exacto de veces a la unidad OU, ni a ninguna de las partes alícuotas en que ésta puede dividirse. Entonces se dice que el segmento MN es *inconmensurable* con la unidad elegida.

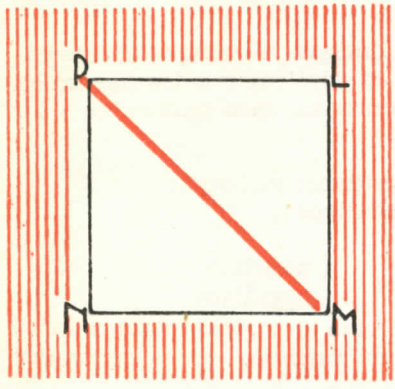


Fig. 1

3. **Existencia de magnitudes inconmensurables.**—Vamos a demostrar, por ejemplo, que la diagonal MP de un cuadrado es inconmensurable con el lado MN del mismo (fig. 1).

En efecto, según el teorema de Pitágoras

$$\overline{MP^2} = \overline{MN^2} + \overline{NP^2} = 2 \cdot \overline{MN^2}$$

Luego:

$$MP = MN \cdot \sqrt{2}$$

La medida, por tanto, de MP, cuando se toma MN como unidad, es $\sqrt{2}$. Supongamos que MP es conmensurable con MN, o sea que su medida es una *fracción irreducible* de la forma $\frac{p}{q}$. Entonces habría de ser

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}; \quad \text{o sea} \quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

De aquí se deduce:

$$p^2 = 2q^2$$

y por ser el segundo miembro múltiplo de 2, también habría de serlo el primero, esto es, $p = 2 = 2p'$. Por tanto,

$$(2p')^2 = 2q^2 \quad ; \quad 4p'^2 = 2q^2$$

o sea

$$2p'^2 = q^2$$

Por la misma razón de antes, sería $q = 2 = 2q'$, y la fracción

$$\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$$

no sería irreducible, contra la hipótesis. Esto quiere decir que $\sqrt{2}$ no puede expresarse en forma de fracción. Lo mismo se puede demostrar de cualquier otra raíz de números enteros o fraccionarios que no son potencias enésimas perfectas. Dichas raíces originan números con infinitas cifras decimales que no se repiten en períodos. Por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}41421...$ Vemos, pues, que tanto el problema de la medida de magnitudes como el de la extracción de raíces de números racionales no pueden resolverse en muchos casos dentro del campo de los números racionales. Esto obliga a la introducción de nuevos entes llamados *números irracionales*. Y así como un número racional hemos visto que puede definirse mediante una sucesión de números decimales, nada más natural que definir el número irracional $\sqrt{2}$ mediante la sucesión

$$u_n = 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ \ldots$$

según vamos a detallar en los párrafos siguientes.

4. Sucesiones de números racionales. Establezcamos una aplicación del conjunto N de los números naturales en el conjunto Q de los números racionales. Se obtiene así un subconjunto de elementos de Q, ordenado por N. Los elementos de Q, correspondientes a los números 1, 2, 3, ..., n, los designaremos por

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \qquad [1]$$

Más brevemente, con la notación u_n representaremos, bien un término cuando se considera n fijo, bien toda la sucesión cuando se considera n variable.

EJEMPLOS: 1.º La aplicación

$$u_1 = 0{,}3\ ,\quad u_2 = 0{,}33\ ,\quad u_3 = 0{,}333\ ,\quad \ldots,\quad u_n = 0{,}33\overbrace{\ldots}^{n}3$$

es una sucesión de números racionales.

2.º La sucesión

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{11},\ \ldots,\ \frac{n}{2n+1}$$

se escribe abreviadamente $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$; éste se denomina término *enésimo*,

término *general*, y ha de ser tal que, dando en él a n los valores 1, 2, 3, ... se obtengan todos los términos de la sucesión.

3.º La sucesión $u_n = \frac{1}{n}$ es la siguiente:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}$$

4.º Partiendo de los números 0 y 1, y sumando cada vez los dos términos precedentes, se obtiene la sucesión siguiente:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

llamada *sucesión de Fibonacci.*

5. **Sucesiones monótonas.**— Una sucesión indefinida u_n se llama *monótona creciente* cuando cada término de la sucesión es mayor o igual que el que le precede; es decir, se verifica:

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_4 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots$$

EJEMPLO 1.º—La sucesión de los números positivos enteros:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \qquad [2]$$

EJEMPLO 2.º:

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{9}, \frac{8}{10}, \frac{9}{11}, \ldots, \frac{2+n}{4+n}, \ldots \qquad [3]$$

Una sucesión indefinida u_n se llama *monótona decreciente* cuando cada término de la sucesión es menor o igual que el que le precede; es decir, se verifica:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant \ldots$$

EJEMPLO 1.º:

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, 8 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots \qquad [4]$$

EJEMPLO 2.º:

$$64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots, 64 \cdot \frac{1}{4^{n-1}}, \ldots \qquad [5]$$

EJEMPLO 3.º:

$$\frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \frac{8}{6}, \frac{9}{7}, \ldots, \frac{4+n}{2+n}, \ldots \qquad [6]$$

6. **Sucesiones acotadas.**—Una sucesión de números racionales cuyos términos sean todos en valor absoluto menores o iguales que un cierto número positivo k, se dice que es *acotada*. Se cumple entonces que

$$|u_n| \leqslant k$$

Una sucesión se dice *acotada superiormente* si todos sus términos son menores o iguales que un cierto número k', o sea, para todo n.

$$u_n \leqslant k'$$

Una sucesión se dice que es *acotada inferiormente* si todos sus términos son mayores o iguales que un cierto número k'', o sea, para todo valor n es

$$u_n \geqslant k''$$

El número k' se llama *cota superior*, y el número k'', *cota inferior* de la sucesión.

EJEMPLOS: 1.º La sucesión

$$0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ \ldots,\ 0{,}\overbrace{33\ldots3}^{n}$$

está acotada superior e inferiormente, ya que

$$0 < u_n < 1$$

2.º La sucesión

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{7},\ \ldots,\ \frac{n}{n+3}$$

está también acotada superior e inferiormente, ya que

$$\frac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant 1$$

Toda sucesión acotada, lo es superior e inferiormente, ya que

$$|u_n| \leqslant k \Rightarrow -k \leqslant u_n \leqslant k$$

7. **Adición de sucesiones.**—Dadas dos sucesiones u_n y v_n, convenimos en definir *suma* de las dos a la sucesión $u_n + v_n$, obtenida sumando los términos de igual índice.

Así, por ejemplo

$$\begin{array}{r} u_n = 0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ \ldots,\ 0{,}\overbrace{33\ldots3}^{n} \\ v_n = 0{,}1,\ 0{,}16,\ 0{,}166,\ \ldots,\ 0{,}16\ldots6 \\ \hline u_n + v_n = 0{,}4,\ 0{,}49,\ 0{,}499,\ \ldots,\ 0{,}49\ldots9 \end{array}$$

Veamos cuáles son las propiedades de esta operación de adición definida en el conjunto S de las sucesiones de números racionales:

1.ª *Uniforme.*—La adición de dos sucesiones es siempre posible, y nos da siempre como resultado otra sucesión de números racionales. Es consecuencia de la propiedad uniforme de la adición de dichos números.

2.ª *Conmutativa*

$$u_n + v_n = v_n + u_n$$

3.ª *Asociativa*

$$(u_n + v_n) + w_n = u_n + (v_n + w_n)$$

4.ª *Elemento neutro.*—Es la sucesión

$$0_n = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0$$

Sumada ésta con cualquier otra sucesión u_n, da siempre como resultado la misma sucesión u_n:

$$u_n + 0_n = 0_n + u_n = u_n$$

5.ª *Elemento simétrico.*—La opuesta de la sucesión u_n, o sea

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots,\ u_n$$

es la sucesión $-u_n$, o sea

$$-u_1,\ -u_2,\ -u_3,\ -u_4,\ \ldots,\ -u_n$$

Se verifica que

$$u_n + (-u_n) = 0_n$$

Por tanto, el conjunto S de las sucesiones de números racionales con la operación de adición tiene la estructura de *grupo abeliano.* (Véase nuestras Matemáticas 5.º curso, núm. 46.)

8. **Multiplicación de sucesiones.**—Dadas dos sucesiones u_n y v_n, convenimos en definir *producto* de las dos a la sucesión $u_n \cdot v_n$, obtenida multiplicando los términos de igual índice.

Por ejemplo

$$u_n = \frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{3}{n}$$

$$v_n = \frac{3}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{4},\ \ldots,\ \frac{n+2}{n}$$

$$u_n \cdot v_n = \frac{9}{1},\ \frac{12}{4},\ \frac{15}{9},\ \frac{18}{16},\ \ldots,\ \frac{3n+6}{n^2}$$

Son evidentes las siguientes propiedades que se basan en las correspondientes de la multiplicación de números racionales:

1.ª *Uniforme.*—La multiplicación de dos sucesiones es siempre posible, y nos da siempre como resultado otra sucesión de números racionales.

2.ª *Conmutativa*

$$u_n \cdot v_n = v_n \cdot u_n$$

3.ª *Asociativa*

$$(u_n \cdot v_n) \cdot w_n = u_n \cdot (v_n \cdot w_n)$$

4.ª *Elemento neutro.*—Es la sucesión

$$i_n = 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

Ahora no existe la propiedad del elemento simétrico, puesto que dada la sucesión

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots, u_n, \ldots$$

su inversa sería

$$\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_4} \ldots, \frac{1}{u_n}, \ldots$$

y si hay algún $u_1 = 0$, resulta que $\frac{1}{u_1} \notin Q$. Entonces u_n no tiene inverso, y basta que haya algún caso en que esto se verifique, para que no exista la propiedad del elemento simétrico.

En cambio sí existe la propiedad 5.ª *distributiva de la multiplicación respecto de la adición*

$$(u_n + v_n) \cdot w_n = u_n \cdot w_n + v_n \cdot w_n$$

9. **El anillo S de las sucesiones de números racionales.**

Todo conjunto C en el que se ha definido una ley de composición interna, que designaremos por $\perp$, que tenga las siguientes propiedades:

1.ª *Uniforme:* el conjunto es *cerrado* respecto a dicha operación; de dos elementos a y b se obtiene siempre el mismo c que también pertenece al conjunto.

$$a \perp b = c$$

2.ª *Asociativa:*

$$(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$$

se dice que tiene la *estructura de semigrupo,* o simplemente que es un *semigrupo.*

Si, además, tiene la propiedad *conmutativa,* se dice que es un *semigrupo abeliano* o *conmutativo.* Y si, además, tiene elemento neutro e, tal que $a \perp e = e \perp a = a$, se dice que el "semigrupo posee *elemento neutro*".

De las propiedades del párrafo anterior deducimos que *el conjunto* S *de las sucesiones de números racionales es un semigrupo abeliano respecto a la operación de multiplicar,* o más sencillamente, que *es un semigrupo multiplicativo con elemento unidad.*

Se llama *anillo* a todo conjunto C en el que se puedan definir dos operaciones o leyes de composición interna distintas, y tales que 1.º), respecto a la primera operación forme un "grupo abeliano"; 2.º), respecto a la segunda operación constituya un "semigrupo", y 3.º), la segunda operación sea distributiva respecto a la primera. Si, además, la segunda operación tiene las propiedades conmutativa y existencia del elemento neutro, se dice que es un *anillo conmutativo con elemento unidad.*

En virtud de las propiedades de los dos párrafos anteriores deducimos que *el conjunto* S *de las sucesiones de números racionales es un anillo conmutativo con elemento unidad.*

10. **Diferencia y cociente de dos sucesiones.**—Una sucesión tiene siempre una opuesta. Llamamos *diferencia* de dos sucesiones u_n y v_n a la suma

$$u_n + (-v_n)$$

La expresamos, generalmente, en la forma $u_n - v_n$. Dicha diferencia siempre existe.

Una sucesión no tiene siempre inversa. Por ello no siempre existe el cociente de dos sucesiones.

Se llama *cociente* de dos sucesiones u_n y v_n al producto

$$u_n \cdot \frac{1}{v_n}$$

(cuando $\frac{1}{v}$ existe, es decir, cuando v_n no contiene ningún elemento nulo).

Generalmente suele escribirse u_n/v_n.

EJEMPLO:

$$u_n = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots,\ 2n+1,\ \ldots$$
$$v_n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

$$u_n - v_n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ n+1,\ \ldots$$
$$u_n/v_n = \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \ldots, \frac{2n+1}{n}$$

11. **El anillo A de las sucesiones acotadas.**—La suma de dos sucesiones acotadas es otra sucesión acotada, ya que

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant k_1 + k_2 = k$$

en virtud de las propiedades del valor absoluto de los números racionales.

Lo mismo sucede con el producto

$$|u_n \cdot v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leqslant k_1 \cdot k_2 = k'$$

Luego deducimos que las sucesiones acotadas determinan un anillo A que está contenido en el conjunto S. Decimos que forman un *subanillo del conjunto* S.

12. **Sucesiones nulas.**—Diremos que una sucesión u_n es nula cuando fijado un número racional $\epsilon > 0$, existe siempre un número natural $m \in N$, que depende de ϵ, tal que para todo $n > m$ es $|u_n| < \epsilon$.

EJEMPLOS: 1.º La sucesión $u_n = \frac{3}{n}$ es nula porque fijado un $\epsilon = \frac{1}{k}$, siendo $k \in N$, se tiene para todo $n > m = 3k$, es

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{3k} \quad ; \quad \frac{3}{n} < \frac{1}{k} = \epsilon$$

o sea, $u_n < \epsilon$.

2.º Del mismo modo demuestra que las sucesiones $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ son nulas.

13. **Propiedades de las sucesiones nulas.**—En primer lugar observemos que las sucesiones nulas constituyen una parte del anillo A de las sucesiones acotadas.

En efecto, si u_n es una sucesión nula, esto quiere decir que para todo $n > m$ es

$$-\epsilon < u_n < \epsilon$$

Luego fuera del intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ hay a lo sumo los términos

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_m$$

y basta tomar como cota el mayor de los números

$$|u_1|, |u_2|, |u_3|, \ldots, |u_m|$$

Además es fácil comprobar que el conjunto I de las sucesiones nulas constituyen un anillo. Luego podemos asegurar que *el conjunto* I *de las sucesiones nulas es un subanillo del anillo* A *de las sucesiones acotadas,* y escribir

$$I \subset A$$

Pero además se cumplen las siguientes propiedades:

1.ª *La diferencia de dos sucesiones nulas es otra sucesión nula.*

En efecto, sean u_n y v_n dos sucesiones nulas. Fijado un $\epsilon > 0$, siempre se podrá encontrar un $m \in N$ y un $m' \in N$, tales que

$$u_n < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad n > m$$

$$v_n < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad n > m'$$

Tomando el mayor de los números m y m', se verifica que

$$| u_n - v_n | \leq | u_n | + | v_n | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $n >$ máx. (m, m').

2.ª *La sucesión* 0, 0, 0, ..., $0 = 0_n$ *es nula.*

Es el elemento neutro del subanillo I.

3.ª *Si una sucesión* u_n *es nula, también lo es la sucesión opuesta* $-u_n$. Pues

$$| -u_n | = | u_n | < \epsilon$$

4.ª *El producto de una sucesión nula por una sucesión acotada es una sucesión nula.*

En efecto, si u_n es una sucesión nula y v_n es una sucesión acotada, se verifica que, fijado un $\epsilon > 0$ cualquiera,

$$| u_n | < \frac{\epsilon}{k} \quad \text{para todo} \quad n > m$$

$$| v_n | < k \quad \text{para todo} \quad n$$

Luego

$$| u_n \cdot v_n | = | u_n | \cdot | v_n | < \epsilon$$

para todo $n > m$.

Como caso particular de esta propiedad, *el producto de dos sucesiones nulas es otra sucesión nula.*

14. El ideal de las sucesiones nulas.—*Ideal* de un anillo A es cualquier subconjunto $I \subset A$, tal que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1.ª $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$

2.ª $a \in I,\ b \in A \Rightarrow a \cdot b \in I$

Resulta, pues, que todo ideal I de un anillo A es un subanillo de A, y por tanto, un subgrupo del grupo aditivo del anillo. No es cierto, en cambio, que, recíprocamente, todo subanillo sea un ideal.

Un ejemplo de ideal es el conjunto de todos los números pares en el anillo de los números enteros. También lo es el conjunto de múltiplos de un entero cualquiera.

En virtud de las propiedades 1.ª y 4.ª del párrafo anterior deducimos que *el conjunto* I *de las sucesiones nulas constituye un ideal del anillo* A *de las sucesiones acotadas.*

15. **Límite de una sucesión.**—*Se dice que una sucesión* u_m *tiene un límite* $a \in \mathbb{Q}$, *si fijado un* ϵ *positivo* ($\epsilon > 0$), *por pequeño que sea, desde un término* u_m *en adelante se verifica que*

$$| u_m - a | < \epsilon$$

Esto equivale a decir que desde un u_m en adelante, todos los términos de la sucesión están dentro de un entorno de radio ϵ del número racional a.

Si $| u_m - a | < \epsilon$, desde un valor de m en adelante, esto quiere decir que la sucesión $u_n - a$ cumple la definición de sucesión nula, y por tanto

$$u_n - a = \epsilon_n$$

es nula.

Se puede también escribir

$$u_n = a + \epsilon_n$$

siendo u_n la sucesión dada y ϵ_n una sucesión nula.

Para indicar que una sucesión u_n tiene un límite a se suele escribir

$$\lim. u_n = a, \quad \text{o también} \quad u_n \to a$$

EJEMPLOS: 1.º La sucesión

$$u_n = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

tiene por límite el número racional $\frac{1}{2}$, pues

$$\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2n - (2n+1)}{4n+2} = -\frac{1}{4n+2}$$

es una sucesión nula, pues puede hacerse tan pequeño como se quiera, tomando n suficientemente elevado.

2.º La sucesión

$$u_n = \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{9}, \frac{8}{10}, \ldots, \frac{n+2}{n+4}, \ldots$$

tiende a 1, ya que

$$\frac{n+2}{n+4} - 1 = \frac{n+2-(n+4)}{n+4} = -\frac{2}{n+4}$$

que es una sucesión nula.

3.º Una sucesión puede tender a su límite permaneciendo constantemente *inferior* a él, o *constantemente superior* a él, o *alternativamente superior e inferior*. Así, la sucesión:

$$-\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots$$

tiene por límite cero, y sus términos son alternativamente inferiores y superiores a este límite. Evidentemente que esta sucesión no es monótona.

Que esta última sucesión tiene por límite cero se expresa así:

$$\lim. \left[(-1)^n \frac{1}{n} \right] = 0, \quad \text{o también} \quad (-1)^n \frac{1}{n} \to 0$$

Evidentemente ésta es una sucesión nula. *Toda sucesión nula tiene por límite el número cero, y las sucesiones de límite cero son las sucesiones nulas.*

16. Propiedades de los límites.—1.ª *Toda sucesión que tiene límite es acotada.* Si una sucesión u_n tiene límite a, es $a_n = a + \epsilon_n$, siendo ϵ_n una sucesión nula, que según el número 13, sabemos que es acotada. Luego también lo es la sucesión a_n.

2.ª *En toda sucesión* u_n *que tiene límite, se verifica la desigualdad*

$$|u_i - u_j| < \epsilon$$

cualquiera que sea $\epsilon > 0$, *sin más que tomar* i *y* j *superiores a un número natural* m *(que depende de* ϵ*).*

En efecto, si $u_n \to a$, se verifica

$$u_i = a + \epsilon_i \quad ; \quad u_j = a + \epsilon_j$$

siendo ϵ_i y ϵ_j términos de una sucesión nula ϵ_n. Por tanto

$$u_i - u_j = a + \epsilon_i - a - \epsilon_j = \epsilon_i - \epsilon_j$$

Para $i, j > m$ se tendrá

$$|\epsilon_i| < \frac{\epsilon}{2} \quad ; \quad |\epsilon_j| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego

$$|a_i - a_j| = |\epsilon_i - \epsilon_j| \leq |\epsilon_i| + |\epsilon_j| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

3.ª *El límite de una suma* (diferencia) *de un número finito de sucesiones es igual a la suma* (diferencia) *de los límites de dichas sucesiones.*

Sean las sucesiones: u_n, cuyo límite es l y v_n, cuyo límite es l'. Según la definición de límite será:

$$|l - u_n| < \epsilon$$

Pero esto quiere decir que $l - u_n$ es un infinitésimo o sucesión nula, ϵ_n'. Se puede, pues, escribir:

$$l - u_n = \epsilon_n'$$

$$l' - v_n = \epsilon_n''$$

Sumando

$$(l + l') - (u_n + v_n) = \epsilon_n' + \epsilon_n'' = \epsilon_n'''$$

en virtud de las propiedades del número 13. Este resultado expresa que $(l + l')$ es el límite de $(u_n + v_n)$, pues la diferencia entre ambos es un infinitésimo. O sea:

$$\lim. (u_n + v_n) = l + l' = \lim. u_n + \lim. v_n$$

EJEMPLO: Las sucesiones 3, 5/2, 7/3, 9/4, ..., $2n + 1/n$ [7]

$1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots, n/n + 1$ [8]

tienen por límites 2 y 1, respectivamente. Su suma:

$$7/2, 19/6, 37/12, \ldots, 3n(n + 1) + 1/n(n + 1)$$

tiene por límite $2 + 1 = 3$.

Se demuestra análogamente para la diferencia.

4.ª *El límite del producto de un número finito de sucesiones es el producto de los límites de los factores.*

Sean las dos mismas sucesiones del número anterior. Se pueden escribir:

$$l = u_n + \epsilon_n'$$

$$l' = v_n + \epsilon_n''$$

Multiplicando:

$$l.l' = u_n v_n + u_n \epsilon_n'' + v_n \epsilon_n' + \epsilon_n' \epsilon_n'' =$$

$$= u_n v_n + \epsilon_n'''$$

$$l.l' - u_n v_n = \epsilon_n$$

según las propiedades del número 13. Este resultado expresa que $l.l'$ es el límite de $u_n v_n$, ya que la diferencia de ambos es un infinitésimo. O sea,

$$\text{lím.}\,(u_n v_n) = l.l' = \text{lím.}\, u_n \cdot \text{lím.}\, v_n$$

NOTA.—Un ejemplo en que se ve cómo es necesario que el número de factores sea finito es el producto de n factores iguales a $1 + \frac{1}{n}$; si aplicásemos la regla, como el límite de cada factor es 1, cuando $n \to \infty$, el límite del producto sería 1. Sin embargo, el límite es el número:

$$e = 2{,}718281$$

EJEMPLO: El producto de las sucesiones [7] y [8] del párrafo anterior es:

$$3/2,\ 5/3,\ 7/4,\ \ldots,\ 2n + 1/n + 1$$

cuyo límite es $2 \cdot 1 = 2$.

5.ª *El límite del cociente de dos sucesiones que tienen límites finitos, es igual al cociente de los límites de las sucesiones cuando el límite del divisor no es cero.*

Sea, hallar el límite de $\frac{u_n}{v_n}$. Llamemos $\frac{u_n}{v_n} = w_n$.

Resulta:

$$u_n = v_n u_n,$$

y según el teorema precedente, $\text{lím.}\, u_n = \text{lím.}\, v_n \,\text{lím.}\, w_n$

De donde:

$$\text{lím. } w_n = \frac{\text{lím. } u_n}{\text{lím. } v_n}, \text{ o sea, lím. } \frac{u_n}{v_n} = \frac{\text{lím. } u_n}{\text{lím. } v_n}$$

La demostración no se aplica al caso en que lím. v_n es cero, sin que lím. u_n lo sea, pues entonces el cociente $\frac{u_n}{v_n}$ crece indefinidamente.

EJEMPLO: El cociente de las sucesiones [7] y [8] del párrafo anterior es:

$$6,\ 15/4,\ 28/9,\ 45/16,\ \ldots,\ (2n+1)\ (n+1)/n^2$$

cuyo límite es $\frac{2}{1} = 2$.

17. **Sucesiones convergentes.**—Toda sucesión u_n, en la que se verifique que para cada $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un m tal que para todo

$$i, j > m \quad \text{es} \quad |u_i - u_j| < \epsilon,$$

se llama *convergente* o *de Cauchy*.

Según la propiedad 2.ª del número anterior, se deduce que:

Toda sucesión que tenga límite es convergente.

Es importante hacer observar que la recíproca no es cierta en el campo Q de los números racionales. Es decir, que *existen sucesiones convergentes que no tienen límite en el cuerpo Q de los números racionales.*

Por ejemplo, en el número 3 vimos que la extracción de la raíz cuadrada del número 2 daba origen a la sucesión

$$u_n = 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ \ldots$$

cuyas cifras decimales no se repiten en períodos. Los cuadrados de los términos de esta sucesión constituyen otra sucesión que tiene límite 2, pero no existe ningún número racional que sea límite de u_n.

Sin embargo, esta sucesión es convergente. Efectivamente, ya que a_n^2 tiene por límite 2, se verifica para todo $i, j > m$ que

$$|a_i^2 - a_j^2| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)$$

Pero para todo i, j se cumple que $a_i > 1$, $a_j > 1$; luego

$$|a_i^2 - a_j^2| = |a_i + a_j| \cdot |a_i - a_j| > 2 \cdot |a_i - a_j|$$

o sea

$$|a_i - a_j| < \frac{|a_i^2 - a_j^2|}{2} < \frac{\epsilon}{2}$$

Así hemos obtenido una sucesión convergente que no tiene límite en el cuerpo de los números racionales.

Como hemos obtenido la anterior sucesión de números cuyos cuadrados tienen límite 2, se podrían formar tantas sucesiones como queramos con igual propiedad. Bastaría tomar, por ejemplo, las raíces por exceso de $\sqrt{2}$, o sea

$$u_n' = 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ 1{,}4143,\ 1{,}41422,\ \ldots$$

o más general, basta tomar dos números cualesquiera cuyos cuadrados comprendan al 2; dividir el intervalo así formado en un cierto número de partes iguales, y tomar los dos puntos consecutivos cuyos cuadrados comprendan al 2, y así sucesivamente.

Al conjunto de todas estas sucesiones lo representaremos por $\sqrt{2}$ y lo llamaremos *raíz cuadrada de dos*.

EJERCICIOS

1. Escribe de otra forma el conjunto de los números racionales α tales que $|\alpha| < 8$.
2. Escribe de otra forma el conjunto de los números racionales α tales que $|\alpha - 5| < 2$.
3. Compara los conjuntos $|\alpha - 3| < 5$ y $|\alpha - 3| \leq 5$. ¿Qué diferencia hay entre ellos?
4. Representa en la recta racional el intervalo del ejercicio anterior.
5. Expresa de otra forma el conjunto de los números racionales α tal que $0 < |\alpha - 3| < 4$. Señala en la recta racional el intervalo correspondiente.
6. Expresa de otra forma y representa gráficamente el conjunto de números racionales α tales que $|\alpha| \geqslant 9$.
7. Desarrolla las sucesiones cuyos términos generales son

$$u_n = \frac{4+n}{2+n} \quad ; \quad v_n = 2^n \quad ; \quad w_n = \frac{2}{n}.$$

8. La sucesión $-3, 0, 3, 6, 9, \ldots$ ¿tiene sucesión inversa?
9. Comprueba si la sucesión $u_n = 2^n$ es acotada o no.
10. Comprueba que la sucesión $u_n = (-1)^n \dfrac{3}{n+8}$ es sucesión nula.
11. Demuestra que la sucesión $\dfrac{1}{n^2} = u_n$ es nula.

12. La sucesión $u_n = \dfrac{n}{n+2}$, ¿es acotada? ¿Es sucesión nula?

13. Comprueba que la sucesión $\dfrac{2n}{n+1}$ tiene por límite 2.

14. Demuestra que la sucesión $\dfrac{5n+3}{2n-1}$ tiene por límite $\dfrac{5}{2}$.

15. Calcula el límite de la suma y del producto de las sucesiones dadas en los dos problemas anteriores, o sea de

$$u_n = \frac{2n}{n+1} + \frac{5n+3}{2n-1} \quad ; \quad v_n = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{5n+3}{2n-1}$$

16. Sabiendo que $\sqrt{3} = 1{,}7321...$, escribe dos sucesiones convergentes definidas por esta expresión.

17. Escribe dos sucesiones monótonas convergentes definidas por la expresión $\sqrt{6} = 2{,}449...$

2

Los números reales

18. **Camino seguido en la ampliación de los números racionales.**— En el último número de la lección anterior nos encontramos en una situación análoga a la que nos obligó a ampliar el conjunto N de los números naturales, para hacer posible siempre la sustracción, creando así los números enteros Z. O a la que, para hacer siempre posible entre éstos la división, nos forzó a introducir los números racionales Q.

Ciñéndonos a este último caso, veíamos allí que en Z la división es posible en algunos casos en que

$$\frac{a}{b} = c \in \mathbf{Z}$$

Cuando a no es múltiplo de b creamos un nuevo tipo de número, llamando *número fraccionario* al par $a/b = (a, b)$. Pero en el caso de que la división sea posible, existen otros pares iguales al a/b

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \ldots = c$$

en los que, en virtud de las propiedades de los números enteros, se verifica que

$$a\,n = b\,m$$

Generalizando este resultado a todos los casos, establecemos la equivalencia

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

y llamamos *número racional* al conjunto de pares equivalentes

$$\left\{ \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots \right\}$$

De un modo análogo, en el número 17 de la lección anterior encontramos sucesiones convergentes de números racionales que tienen límite racional

$$\lim. u_n = a \in \mathbf{Q}$$

Cuando la sucesión convergente no tiene límite creamos un nuevo tipo de número, llamando *número irracional* a la sucesión u_n.

Pero en el caso de existencia de límite, hay otras sucesiones u_n' que tienen el mismo límite que u_n, o sea

$$\text{lím. } u_n' = \text{lím. } u_n = a \in \mathbb{Q}$$

teniendo todas ellas de común que

$$\text{lím. } (u_n' - u_n) = 0$$

Generalizando este resultado a todos los casos, establecemos la equivalencia

$$u_n \sim u_n' \Leftrightarrow \text{lím. } (u_n - u_n') = 0$$

y llamamos **número real** al conjunto de sucesiones equivalentes

$$\{ u_n, u_n', \ldots \}$$

19. **El número real.**—En el conjunto S_c de las sucesiones convergentes de números racionales definimos, de acuerdo con el párrafo anterior, la relación de equivalencia siguiente:

Dos sucesiones u_n *y* u_n' *son equivalentes si su diferencia es una sucesión nula*

$$u_n \sim u_n' \Leftrightarrow u_n - u_n' = \epsilon_n$$

Es inmediata la comprobación de que esta relación tiene las tres propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, o sea, es una relación de equivalencia.

Por tanto, realiza una clasificación del conjunto S_c en clases de equivalencias: cada clase contiene todas las sucesiones convergentes que difieren entre sí por una sucesión nula.

Cada una de dichas clases es, por definición, un número real.

Ya que cada clase viene determinada por una sucesión convergente, que llamamos *representante* de la misma, resulta que *un número real viene definido por una sucesión convergente de números racionales.*

Cualquier otra sucesión equivalente a ella representa del mismo modo dicho número real, ya que pertenece a la misma clase.

En particular, las sucesiones con límite racional a definen el número a caso particular de número real.

EJEMPLOS: 1.º El número irracional π, que expresa la medida de una circunferencia tomando su diámetro como unidad, se define por medio de la sucesión monótona convergente

$$3 < 3{,}1 < 3{,}14 < 3{,}141 < 3{,}1415 < \ldots$$

Números irracionales son los que no pueden expresarse en forma de fracción. Como consecuencia tampoco pueden expresarse en forma de fracción decimal periódica, pues ésta es equivalente a una fracción.

2.º La sucesión

$$0{,}3 < 0{,}33 < 0{,}333 < 0{,}3333 < \ldots$$

define el número racional $\frac{1}{3}$, ya que sus términos son los cocientes por defecto de la división 1 : 3.

Para representar un número real bastará escribir uno de los números decimales de la primera sucesión seguido de puntos, que indican continuación ilimitada de cifras decimales. Así

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots\ldots \quad ; \quad \pi = 3{,}141592\ldots\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7321\ldots\ldots \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots\ldots$$

Podemos, pues, decir:

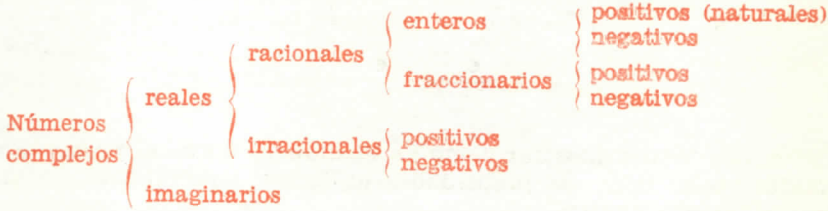
Número real es el que puede escribirse con infinitas cifras decimales.

Si éstas son periódicas, el número es racional; si no son periódicas, el número es irracional.

Para dar solución a la radicación de números negativos, es necesaria aún una nueva ampliación del concepto de número, que hicimos en Quinto Curso, con la introducción de los números *imaginarios*.

Al conjunto de los números reales e imaginarios se denomina *números complejos*.

Las diversas clases de números van así indicadas en el siguiente cuadro:



20. Adición de números reales.—La adición de números reales viene determinada por la adición de sucesiones convergentes, ya definida en el número 7. Es fácil demostrar que *la adición de sucesiones convergentes da como resultado otra sucesión convergente*. En efecto, si para todo $i, j > m$, es

$$|u_i - u_j| < \frac{\epsilon}{2} \quad ; \quad |v_i - v_j| < \frac{\epsilon}{2}$$

se tendrá también

$$|(u_i + v_i) - (u_j + v_j)| \leq |u_i - u_j| + |v_i - v_j| <$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Luego $u_n + v_n$ también es convergente.

Ahora es fácil demostrar, análogamente a como se hizo en el número 7, que esta adición tiene las propiedades uniforme, conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento simétrico. Luego el conjunto R de los números reales tiene, con la operación de adición, estructura de *grupo abeliano.*

21. **Multiplicación de números reales.**—El producto de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente.

En efecto

$$u_i v_i - u_j v_j = u_i v_i - u_i v_j + u_i v_j - u_j v_j = \\ = u_i (v_i - v_j) + (u_i - u_j) v_j$$

Pero en virtud de la convergencia y de la acotación de las sucesiones u_n y v_n, se tiene para todo $i, j > m$:

$$|v_j| < k \qquad |u_i - u_j| < \frac{\epsilon}{2k}$$

$$|u_j| < h \qquad |v_i - v_j| < \frac{\epsilon}{2h}$$

y por consiguiente

$$|u_i v_i - u_j v_j| \leqq |u_i| \cdot |v_i - v_j| + |u_i - u_j| \cdot |v_j| < \\ < h \cdot \frac{\epsilon}{2h} + \frac{\epsilon}{2k} \cdot k = \epsilon$$

Ahora es fácil demostrar como en el número 8 que el producto de números reales tiene las propiedades uniforme, conmutativa, asociativa y elemento neutro.

Además vamos a demostrar que se cumple la propiedad del elemento simétrico, o sea, que *todo número real tiene otro inverso.* En efecto, si en la sucesión u_n representativa del número real no hay ningún término nulo, entonces el inverso viene representado por

$$\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_4}, \ldots \frac{1}{u_n}, \ldots$$

Pero si en u_n existen términos nulos, bastará demostrar que podemos encontrar en la clase $\{ u_n, u_n', \ldots \}$ un representante que no tenga ningún término nulo. Sea por ejemplo

$$u_n = u_1, u_2, 0, 0, 0, \ldots, u_n, \ldots$$

Formemos una sucesión nula ϵ_n que no tenga ningún término nulo, por ejemplo

$$\epsilon_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Si en esta sucesión cambiamos por 0 los términos correspondientes a los no nulos en la sucesión u_n, sigue siendo sucesión nula, o sea

$$\epsilon_n' = 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, 0, \ldots$$

Sumando esta sucesión ϵ_n' con la dada u_n obtendremos otra sucesión u_n'

$$u_n' = u_1, u_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, u_n, \ldots$$

que es de la misma clase que u_n, ya que

$$u_n - u_n' = \epsilon_n'$$

y que por otra parte no tiene ningún término nulo.

Estamos ahora en el primer caso, y podemos encontrar el número inverso del dado. Por tanto, respecto a la multiplicación, el conjunto R de los números reales tiene también la estructura de *grupo abeliano*.

22. **El cuerpo R de los números reales.**—La multiplicación de números reales es además *distributiva* respecto a la adición como se puede comprobar fácilmente. Por tanto, según el número 252 de nuestras Matemáticas de 5.º Curso, podemos asegurar que **el conjunto R de los números reales es un cuerpo conmutativo.**

Tenemos así completada una ampliación natural del cuerpo Q en el cuerpo R, que verifica el *principio de permanencia de las leyes formales,* o sea que el nuevo campo ampliado R satisface las mismas leyes formales que el campo anterior Q.

Es fácil ver además que las definiciones dadas de las operaciones con los números reales coinciden con las dadas para números racionales cuando los datos lo son. Todo esto nos hace ver que las operaciones así definidas son una generalización adecuada de las anteriormente dadas.

EJEMPLOS: 1.º Dados dos números reales

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \quad , \quad \sqrt{3} = 1{,}7321\ldots$$

o bien representándolos por sus correspondientes sucesiones convergentes

$$\sqrt{2} = 1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1,\ 1{,}7,\ 1{,}73,\ 1{,}732,\ 1{,}7321,\ \ldots$$

la suma $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ viene definida por

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=2,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}146,\ 3{,}1463,\ \ldots$$

2.º Dados los números $\sqrt{7}=2{,}6457\ldots$, $\sqrt{8}=2{,}8284\ldots$, su producto viene dado por

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}=2\cdot2,\ 2{,}6\cdot2{,}8,\ 2{,}64\cdot2{,}82,\ \ldots=4,\ 7{,}288,\ 7{,}4448,\ \ldots$$

23. **Números aproximados.**—En muchos casos, más que el problema teórico de hallar *exactamente* el número real definido por una serie de operaciones entre números irracionales, interesa calcular *aproximadamente* el resultado de tales operaciones. Este problema práctico se resuelve sustituyendo los números irracionales por expresiones decimales aproximadas de los mismos y operando con ellas según las reglas ya conocidas.

EJEMPLO: Un valor aproximado de $\sqrt{8}$ es 2,8284, y un valor aproximado de $\sqrt{7}=2{,}6457$. Luego un valor aproximado de su producto $\sqrt{8}\cdot\sqrt{7}$ es $2{,}8284\cdot2{,}6457=7{,}48309$.

En el cálculo con números aproximados se llama *error absoluto* la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado; y se llama *error relativo* el cociente entre el error absoluto y el valor exacto.

EJEMPLO.—Si tomamos 1,41 como valor aproximado de $\sqrt{2}$, el error absoluto es:

$$\sqrt{2}-1{,}41=1{,}4142\ldots-1{,}41=0{,}0042\ldots$$

y el error relativo:

$$\frac{\sqrt{2}-1{,}41}{\sqrt{2}}=\frac{0{,}0042\ldots}{1{,}4142\ldots}$$

Cuando los números aproximados proceden de mediciones experimentales, el error exacto de que vienen afectados no se conoce, pero se sabe que, en valor absoluto, es menor que cierto número l llamado *límite superior del error; es decir,* $|E|<l$.

Así, cuando se dice que un nonius aprecia décimas de milímetro, se quiere expresar que $l=0{,}1$ mm, y, por lo tanto, $|E|<0{,}1$ mm.

Se dice que un número aproximado tiene *todas sus cifras exactas* si el error de que está afectado es menor que una unidad del orden de su última cifra. Así:

EJEMPLO 1.º—La distancia aproximada de la Tierra al Sol puede expresarse por 149.000.000 de km, con error menor de un millón.

Aquí la unidad de medida puede considerarse que es el *millón de kiló-*

metros, y se dice que la distancia es 149 de estas unidades, *con error menor de una unidad*. En este caso las cifras 149 que dan el *número* de unidades, son las *exactas*, mientras que los seis ceros que siguen se llaman *inexactas*.

EJEMPLO 2.º Supongamos que la distancia entre dos ciudades es de 6.100 km.

Si de esta afirmación ha de entenderse que la distancia es *en números redondos, de 61 centenas*, con error menor que una *centena*, entonces la unidad de medida es *una centena de kilómetros;* de modo que las cifras *61* son exactas, y los dos ceros inexactas.

Pero si se entiende que determinada distancia ha sido medida o calculado con error menor de un km, todas las cifras 6.100 son exactas.

24. Cálculo con números aproximados.—Los problemas fundamentales del cálculo con números aproximados son:

1.º *Conocidos los límites superiores de los errores de los números con que se opera, determinar el límite superior del error del resultado.*

2.º *Hallar el límite superior de los errores de los datos para que el resultado se obtenga con una aproximación prefijada.*

Resolveremos el problema 1.º para la suma, por tener aplicación en una lección posterior. Para ello, se necesita antes demostrar el siguiente *teorema:*

El límite de error absoluto de una suma algebraica de números aproximados es igual a la suma de los límites de los errores absolutos de los sumandos.

En efecto, si α, β, γ son las cantidades, a, b, c sus valores aproximados, E_1, E_2, E_3 sus errores absolutos, y l_1, l_2, l_3 los respectivos límites de estos errores, se tiene,

$$\begin{gathered}\alpha = a + E_1 \\ \beta = b + E_2 \\ \gamma = c + E_3 \\ \hline \alpha - \beta + \gamma = a - b + c + (E_1 - E_2 + E_3)\end{gathered}$$

Y como $|E_1| < l_1$, $|E_2| < l_2$, $|E_3| < l_3$, será $(E_1 - E_2 + E_3) < l_1 + l_2 + l_3$, lo cual prueba el teorema.

EJEMPLO.—*Se han medido tres segmentos y se ha obtenido como medidas 23,7 mm, 2,4 mm y 51,6 mm, cuyos límites de los errores absolutos son ± 0,1 mm. ¿Cuál es el límite del error absoluto de la suma?*

Solución: El signo ± nos indica que no conocemos el sentido del error. Según el teorema, el límite del error de la suma es $\pm 0{,}1 \times 3 = 0{,}3$ mm. Y la suma es 77,7 mm ± 0,3 mm.

Del mismo modo la diferencia de las longitudes de los dos primeros segmentos es 21,3 mm ± 0,2 mm.

Consecuencia de esto es que *una suma algebraica no debe darse con más decimales que los que tiene el sumando que menos tenga. Y que el error absoluto de la suma de varios sumandos aproximados tiene*

por límite el mayor de los límites de los sumandos multiplicado por 10 si el número de sumandos no excede de 10, por 100 si está comprendido entre 10 y 100, y así sucesivamente.

Por tanto, si se suman varios números aproximados con órdenes de aproximación diferentes, la suma tendrá una cifra exacta menos que el sumando de menos cifras exactas, si el número de sumandos es menor que 10; dos menos, si está comprendido entre 10 y 100, etc.

1' 2 5 9 9	EJEMPLO.—Sean los sumandos dados con 4, 5, 2, 4 cifras exactas. La última cifra exacta queda marcada con un punto sobre ella. Se suman como si fueran exactos y la suma tendrá dos cifras exactas, pero sin conocer el sentido de la aproximación, si no era conocido el de los datos.
1' 7 7 2 4	
0' 2 8 3 6	
4' 2 5 3 6	
7' 5 6 9 5	

EJERCICIOS

1. Forma sucesiones monótonas convergentes que tengan a $\sqrt{5}$ como límite común.
2. Calcula dos sucesiones que definan $\sqrt{10}$.
3. Define $\frac{1}{7}$ con dos sucesiones monótonas que le tengan por límite común.
4. Dadas las siguientes expresiones:

   3,5476... ; 0,17444... ; 3,14159... ; 6,73434... ;

   di cuáles son números irracionales y cuáles racionales.
5. ¿En qué se diferencian las expresiones siguientes?

   $\sqrt{3} = 1{,}73205...$ y $\sqrt{3} = 1{,}73205$; $\pi = 3{,}1415...$ y $\pi = 3{,}1415$
6. ¿Cómo definir la suma $\sqrt{2} + \sqrt{5}$? ¿La diferencia $\sqrt{5} - \sqrt{2}$? Desarrolla los cálculos. (Haz la suma o la diferencia de las dos sucesiones que definen, respectivamente, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.)
7. ¿Cómo definir los productos $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$? Desarrolla los cálculos. (Haz el producto de las dos sucesiones que den en ambos números.)
8. Halla la fracción generatriz de las expresiones decimales siguientes:

   4,555... ; 2,13070707... ; 0,6434343...
9. Demuestra que, cualquiera que sea el número natural n, la fracción decimal equivalente a la suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ es periódica mixta.

10. Da una sucesión equivalente a cada una de las siguientes:

a) $u_n = 2,\quad 2{,}5,\quad 2{,}57,\quad 2{,}573,\quad 2{,}5739,\quad \ldots$

b) $v_n = \dfrac{1}{n}$; *c)* $w_n = \dfrac{n}{n+2}$

11. Dadas las sucesiones

$$u_n = 1,\quad 1{,}3,\quad 1{,}33,\quad 1{,}333,\quad \ldots$$
$$v_n = 4,\quad 4{,}7,\quad 4{,}77,\quad 4{,}777,\quad \ldots$$

calcula las sucesiones $u_n + v_n$ y $u_n \cdot v_n$.

12. Escribe una sucesión de la misma clase que $u_n + v_n$ del problema anterior.

• **13.** Halla $\sqrt{35}$ con error menor que una centésima.

• **14.** Sabiendo que $\pi = 3{,}141592\ldots$, escríbelo con error menor que una diezmilésima.

3

El plano vectorial

25. **Representación gráfica de los números reales.**—Sabemos que para representar sobre un eje los números racionales, se toma sobre él un punto *origen* O (fig. 2) y un segmento OU que se considera como unidad. A partir de O, y tanto a derecha como a izquierda, se lleva sucesivamente dicho segmento, obteniéndose puntos que representan los *números* 1, 2, 3, ..., —1, —2, —3. Es fácil también representar los

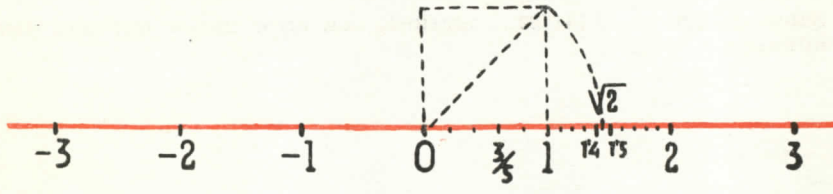


FIG. 2

números fraccionarios. Por ejemplo, para hallar el punto que representa el quebrado $\frac{3}{5}$ se divide el segmento unidad en 5 partes iguales, y a partir de O se llevan 3 de dichas partes hacia derecha.

Sabemos que los puntos que representan los números enteros no llenan la recta. Pero también que entre dos números racionales hay otros infinitos números racionales y que entre dos puntos de una recta hay otros infinitos puntos de la misma. Entonces podemos preguntarnos: ¿los puntos que representan los números racionales, llenan o no la recta?

Inmediatamente podemos contestar con la negativa. En efecto, construyamos un cuadrado de lado unidad (fig. 2). Su diagonal sabemos que mide $\sqrt{2}$. Llevemos dicha diagonal, a partir de O, hacia derecha en el eje. El punto P, así señalado, no puede representar un número racional, ya que $OP = \sqrt{2}$. Luego los números racionales no llenan la recta.

En este caso podemos convenir en que dicho punto P represente al número irracional $\sqrt{2}$. Dado un número irracional cualquiera $a = \{ a_n, a_n', \ldots \}$, ¿existirá siempre un punto que lo represente? Acudamos para ello a dos sucesiones monótonas convergentes que lo definen.

Representemos primeramente los números racionales a_1, a_2, a_3, ..., en los puntos A_1, A_2, A_3, ... A continuación los números a'_1, a'_2, a'_3, ..., en los puntos A'_1, A'_2, A'_3, ... (fig. 3). ¿Existirá un punto situado a derecha de los primeros y a izquierda de los segundos? A esa pregunta

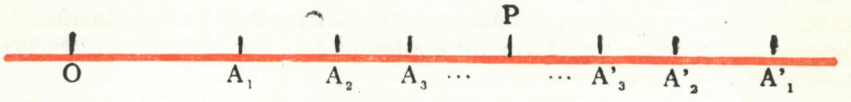


FIG. 3

contesta afirmativamente la intuición, pero desde el punto de vista lógico es necesario postular su certeza, enunciando el siguiente:

POSTULADO DE CONTINUIDAD.—*Dados dos sistemas de segmentos:*

$$O A_1 \leqq O A_2 \leqq O A_3 \leqq \ldots$$
$$O A'_1 \geqq O A'_2 \geqq O A'_3 \geqq \ldots$$

tales que los del primer sistema son menores que los del segundo, y que los de uno lleguen a diferir tan poco como se quiera de los correspondientes del otro, existe un segmento único OP *mayor que todos los del primer sistema y menor que todos los del segundo.*

Haciendo corresponder a este punto P el número irracional *a*, podremos decir: *A todo número real corresponde un punto de la recta y recíprocamente a todo punto corresponde un número real.*

De este modo se puede establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales, de tal modo que a cada número real corresponda un punto y sólo uno, y recíprocamente, a cada punto corresponda un número real y sólo uno, a saber: la *medida* del segmento limitado por el origen y el punto dado (n.º 2).

26. **Vectores deslizantes en la recta.**—Consideremos todos los segmentos orientados o vectores de una línea recta. Tomemos sobre ella un origen O, y llamemos *abscisa* de un punto cualquiera de la misma a su distancia a dicho origen, precedida del signo + o —, según que esté el punto situado a uno u otro lado del origen.

Llamaremos *medida algebraica* de un vector sobre la recta a la abscisa del extremo del vector disminuida en la abscisa del origen.

Es decir, siendo *a* la abscisa del punto A y *b* la del punto B, la medida algébrica del vector $\overrightarrow{AB}$ es

$$\overline{AB} = b - a$$

Diremos que *dos vectores de la recta son iguales cuando tienen la misma medida,* o sea

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Es fácil ver que ésta es una relación de equivalencia, pues tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto, clasifica los vectores de la recta en *clases de equivalencia,* que se llaman *vectores deslizantes.*

A cada vector deslizante se asocia su medida algébrica, y se puede definir una adición de vectores deslizantes y una multiplicación por un número real. Esto nos hace ver que el conjunto de los vectores deslizantes constituye un *espacio vectorial.*

Así se define, por ejemplo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Suma de dos vectores deslizantes es el que tiene como medida la suma de las medidas de los dos vectores dados.

27. **Razón simple de tres puntos alineados.**—Llamaremos *razón de dos vectores deslizantes* a la razón de sus medidas algébricas. Por tanto, dicha razón es positiva o negativa según que las medidas sean del mismo o de distinto signo.

Dados tres puntos M, A y B sobre una recta, se llama *razón simple* entre los mismos, y se representa por (MAB) a la razón entre los vectores $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MB}$, y, por tanto, a la razón entre sus medidas

$$(MAB) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda$$

Para simplificar, en adelante representaremos sencillamente por MA la medida del vector $\overrightarrow{MA}$.

28. **El plano vectorial.**—A lo largo de los números 40 a 49 de nuestras Matemáticas de 5.º Curso hicimos el año pasado el estudio del conjunto de vectores libres del plano, al que denominamos *plano vectorial,* o espacio vectorial de dos dimensiones E_2. Ahora vamos a hacer el estudio analítico de dicho conjunto E_2, o sea referido a un sistema de ejes de coordenadas cartesianas.

Sabemos que en dicho sistema un punto A viene determinado por dos números, a los que denominamos **coordenadas** del mismo: su *abs-*

cisa 1 y su *ordenada* 3 (fig. 4). Un vector $\overrightarrow{AB}$ vendrá determinado analíticamente por las coordenadas de sus dos extremos A y B, o sea por dos pares de números.

En la figura 4 hemos representado el vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A(1,3) y B(5,1).

EJEMPLOS: 1.º Representa el vector $\overrightarrow{CD}$, siendo C (2, 3) y D (4, 6).

2.º Escribe los dos pares de números que representan el vector EF de la figura 4.

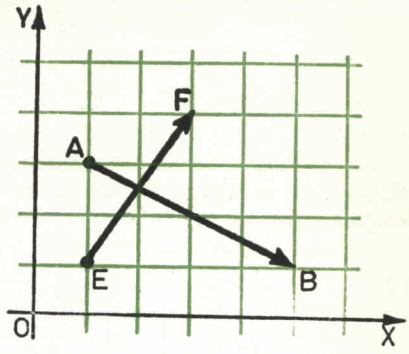


FIG. 4

29. **Componentes de un vector.**—Sabemos que *proyección* de un punto A sobre un eje OX es el pie A′ de la perpendicular desde A a dicho eje. Y que proyección de un vector AB es el vector $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$ que tiene por origen y extremo, respectivamente, las proyecciones del origen y extremo del vector dado (fig. 5).

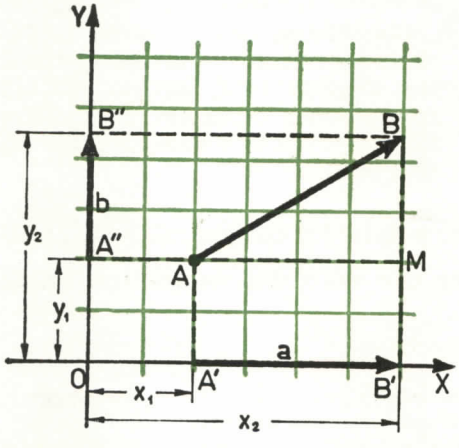


FIG. 5

Del mismo modo, proyección de $\overrightarrow{AB}$ sobre OY es el vector $\overrightarrow{A''B''} = \vec{b}$. Las dos proyecciones $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de un vector $\overrightarrow{AB}$ sobre los ejes de coordenadas se llaman **componentes** del vector.

Si es $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se tiene

$$\boxed{a = x_2 - x_1 \quad ; \quad b = y_2 - y_1} \qquad [1]$$

EJEMPLOS: 1.º *Halla las componentes del vector* CD, *siendo* C (—1, 4) y D (3, —2).

Son

$$a = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4 \quad ; \quad b = -2 - 4 = -6$$

2.º *Siendo los componentes de un vector* MN, a = 3, b = 4, *y siendo* M (— 2, 5), *halla las coordenadas de* N.

Sean (x, y) dichas coordenadas. Se verifica que

$$3 = x - (-2) = x + 2 \Rightarrow x = 3 - 2 = 1$$
$$4 = y - 5 \Rightarrow y = 4 + 5 = 9$$

Por tanto, N (1, 9).

30. **Componentes de vectores equipolentes.**—Observemos en la figura 5 que $a = AM$, $b = MB$, o sea que los componentes del vector AB son los catetos del triángulo rectángulo AMB.

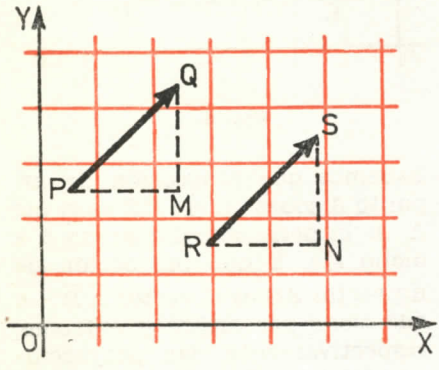


Fig. 6

Sean ahora dos vectores equipolentes PQ y RS (fig. 6). Los triángulos rectángulos PQM y RSN tienen sus lados paralelos, luego sus ángulos iguales, y además $\overline{PQ} = \overline{RS}$. Esto indica que dichos triángulos son iguales, y por tanto, que los *dos vectores equipolentes tienen componentes iguales.*

Concluimos que todos los representantes de un vector libre tienen las mismas componentes. *Dichas componentes determinan el vector libre y se llaman* **componentes del vector libre.**

Para indicar que un vestor libre $\vec{v}$ tiene los componentes (2, 1) escribiremos $\vec{v}(2, 1)$, y para indicar que sus componentes son (a, b) escribiremos $\vec{v}(a, b)$.

31. Adición de vectores libres.—Sabemos que para sumar dos vectores libres **v** y **u**, se toma un punto cualquiera P del plano y se traza PA, representante de **v**, y a continuación $\overrightarrow{AB}$ representante de **u**; el vector **v** + **u** es el formado por PB y todos sus equipolentes.

Si llamamos **v**(a, b) y **u**(a', b'), observemos que (figura 7)

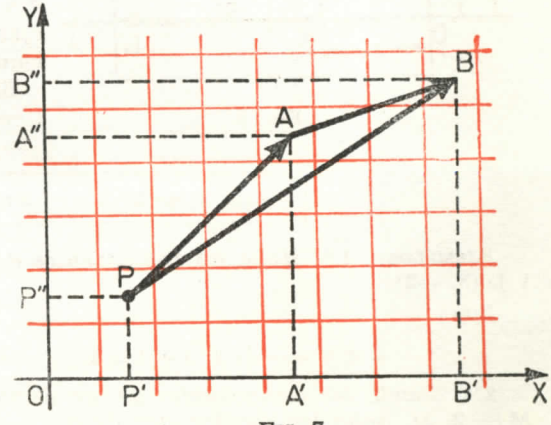


Fig. 7

$$P'B' = P'A' + A'B' = a + a'$$

$$P''B'' = P''A'' + A''B'' = b + b'$$

O sea, que los componentes de $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ son

$$(a + a',\ b + b') \qquad [2]$$

EJEMPLOS: 1.º *Dados los vectores* $\mathbf{v}\ (3, 5)$ *y* $\mathbf{u}\ (2, -7)$, *halla* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Los componentes de $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ son

$$3 + 2 = 5 \quad ; \quad 5 + (-7) = -2$$

Luego

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}\ (5, -2)$$

2.º *Dados los vectores* $\mathbf{v}\ (2, -1)$, $\mathbf{u}\ (3, 2)$ *y* $\mathbf{w}\ (-5, 4)$, *halla* $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Los componentes de $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$ son

$$2 + 3 + (-5) = 0 \quad ; \quad -1 + 2 + 4 = 5$$

Luego

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}\ (0, 5)$$

Es un vector paralelo a OY.

32. Punto de división de un vector en una razón dada.—Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, supongamos se quiere hallar el punto $P(x, y)$ situado en la recta que pasa por P_1 y P_2 y tal que *la razón simple* (PP_1P_2) *sea igual a un número real* λ *dado*. Es decir (fig. 8)

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \lambda \qquad [3]$$

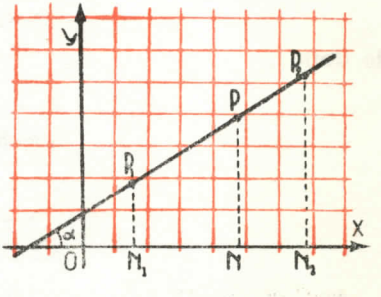


FIG. 8

Si P está entre P_1 y P_2 los vectores PP_1 y PP_2 son de sentido contrario y, por tanto, λ es negativo. Si P está fuera del segmento P_1P_2, los vectores PP_1 y PP_2 son del mismo sentido, y λ es positivo. Esto en cuanto al signo. Y en cuanto al valor, puede tener cualquier valor negativo cuando P está entre P_1 y P_2; si P está a la izquierda de P_1, λ puede recibir valores positivos desde 0 a $+1$; y si P está a la derecha de P_2, λ puede recibir valores positivos desde

$+1$ a $+\infty$. El valor $+1$ para λ queda excluido. Esto queda resumido en el siguiente esquema:

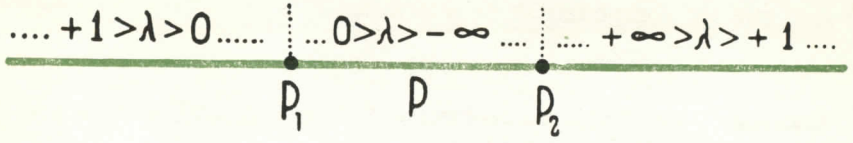


FIG. 9

Hallemos las coordenadas del punto $P(x, y)$ que cumple con la condición [3].

Tracemos las ordenadas N_1P_1, NP, N_2P_2. Estas ordenadas cortan segmentos proporcionales sobre las rectas P_1P_2 y OX; es decir:

$$\frac{NN_1}{NN_2} = \frac{PP_1}{PP_2} = \lambda \qquad [4]$$

Pero

$$NN_1 = -N_1N = -(ON - ON_1) = ON_1 - ON = x_1 - x$$

$$NN_2 = ON_2 - ON = x_2 - x.$$

Luego sustituyendo en [4] se obtiene:

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \lambda$$

de donde,

$$x_1 - x = \lambda x_2 - \lambda x$$

$$x_1 - \lambda x_2 = x(1 - \lambda)$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}} \qquad [5]$$

Análogamente, trazando las abscisas de P_1, P y P_2, obtenemos:

$$\boxed{y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}} \qquad [6]$$

EJEMPLO 1.º *Hallar el punto* P *que divide al vector* P_1P_2, *siendo* $P_1(-2, -5)$, $P_2(3, 4)$, *en la razón* $\lambda = +\frac{1}{3}$.

Solución: Por hipótesis:

$$\frac{PP_1}{PP_2} = +\frac{1}{3}$$

Luego, aplicando las fórmulas [5] y [6]:

$$x = \frac{-2 - \frac{1}{3}\cdot 3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-6-3}{3-1} = -\frac{9}{2}$$

$$y = \frac{-5 - \frac{1}{3}\cdot 4}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-15-4}{3-1} = \frac{-19}{2}$$

Luego el punto pedido es $P\left(-\frac{9}{2}, -\frac{19}{2}\right)$.

EJEMPLO 2.º—*Hallar los puntos que dividen al vector cuyos extremos son* (1, 3) *y* (5, —2) *en tres partes iguales.*

Solución: Para uno de los puntos pedidos, $\lambda = \frac{-1}{2}$.

Luego:

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3} \quad ; \quad y = \frac{3 - \frac{1}{2}\cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

Para el segundo punto de división, $\lambda = -2$.

Luego:

$$x = \frac{1 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{11}{3} \quad ; \quad y = \frac{3 - 2\cdot 2}{1+2} = \frac{-1}{3}$$

Los dos puntos pedidos son: $P\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y $P'\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

33. Punto medio de un vector.—Un caso especial importante del problema anterior es aquel en que P es el punto medio del vector P_1P_2. Haciendo $\lambda = -1$ en las fórmulas [5] y [6], resulta para coordenadas de dicho punto:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \qquad [7]$$

Las coordenadas del punto medio de un vector son la media aritmética de las coordenadas correspondientes a los extremos del mismo.

34. Coordenadas del baricentro de un triángulo.—Se trata de hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$.

Sabemos que el baricentro se encuentra sobre una mediana, a los $\frac{2}{3}$ del vértice y $\frac{1}{3}$ de la base. Sea D el punto medio de BC (fig. 10); sus coordenadas valen, en virtud de las fórmulas [7]:

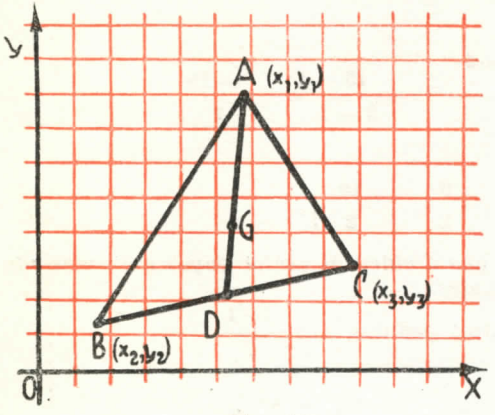


FIG. 10

$$\frac{x_2 + x_3}{2} \qquad \frac{y_2 + y_3}{2}$$

Sea AD la mediana y G el baricentro; éste estará situado sobre el segmento AD a una distancia tal que:

$$\frac{GA}{GD} = -\frac{2/3}{1/3} = -2$$

Llamando x e y las coordenadas de G, y aplicando las fórmulas [5] y [6], obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + 2 \cdot \dfrac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y &= \frac{y_1 + 2 \cdot \dfrac{y_2 + y_3}{2}}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{aligned}\right\} \qquad [8]$$

Las coordenadas del baricentro de un triángulo son la media aritmética de las cordenadas correspondientes de los tres vértices.

EJERCICIOS

1. ¿Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo A(5, 3), B(0, —3), C(1, 1) y D(—4, —5)?

2. Siendo $a = 2$, $b = 5$ las componentes de un vector EF, y E(3, -2) halla las coordenadas de F.

3. El vector $\overrightarrow{PQ}$ es equipolente al vector $\overrightarrow{RS}$, siendo P(2, 5), Q(3, 8), R(-2, -4) y S(x, y). Halla las coordenadas de S.

4. Si $\mathbf{u}(3, -4)$ y $\mathbf{v}(2, 5)$, halla $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{u}$.

5. Halla $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, siendo A(2, 8), B(3, 6), C(-2, -3) y D(1, 1).

6. Efectúa la adición vectorial $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ siendo $\mathbf{u}(1, 1)$, $\mathbf{v}(3, 7)$ y $\mathbf{w}(-2, -5)$.

7. Dados los vectores $\mathbf{u}(-2, 5)$, $\mathbf{v}(3, -1)$ y $\mathbf{w}(a, b)$, halla las componentes a y b para que se verifique

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$$

8. Halla las coordenadas del punto medio del vector que une los puntos (5, 3) y (7, 9).

9. Los vértices de un triángulo son A(2, 3), B(4, -5) y C(-3, -6); halla las coordenadas de los puntos medios de sus lados.

10. El punto medio de un vector es (-1, 2), y una extremidad de dicho vector es 2, 5). Halla las coordenadas de la otra extremidad.

11. Halla las coordenadas del punto P de una recta determinada por $P_1(1, 7)$ y $P_2(6, -3)$ y para el cual $\dfrac{PP_1}{PP_2} = \dfrac{-2}{3}$.

12. Halla las coordenadas del punto que divide al segmento cuyos extremos son (-2, 1) y (3, -4) en la razón 8/3.

13. Halla las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al vector que une los puntos $P_1(3, -1)$ y $P_2(9, 7)$.

14. El punto (16, 3), ¿en qué razón divide al vector que une los puntos (-5, 0) y (2, 1)?

15. Si $A_m(2, 1)$, $B_m(3, 3)$ y $C_m(6, 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo?

16. Una extremidad de un vector es el punto $P_1(2, -3)$. Otro punto P dista de P_1 $\dfrac{1}{5}$ de la longitud del segmento P_1P_2, tiene por coordenadas (1, -2) y pertenece a dicho vector. ¿Cuáles son las coordenadas de P_2?

4

El plano afín

35. **La Geometría afín de dos dimensiones.** — En un sistema de coordenadas cartesianas tomemos de cada vector libre el representante que tiene su origen en el origen O de coordenadas. Hagamos ahora corresponder a cada vector libre el extremo P de dicho representante $\overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OP} \rightleftarrows P$$

Tenemos así una correspondencia biunívoca entre los vectores libres del plano y los puntos del mismo, en la que las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ (a, b) son las coordenadas cartesianas del punto correspondiente P (a, b) (fig. 11).

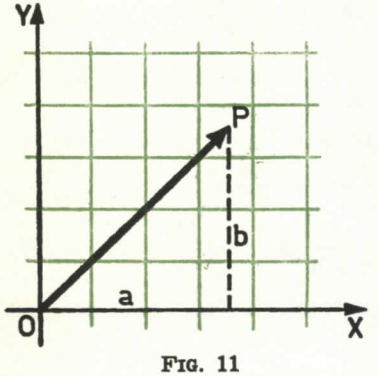


FIG. 11

Al plano, considerado como conjunto de puntos y prescindiendo de las nociones de distancia y de medida de ángulos, se denomina **plano afín.**

Cuestiones fundamentales de la Geometría afín de dos dimensiones son las de dirección, paralelismo, alineación, incidencia y sentido u orientación, que iremos considerando sucesivamente.

36. **Ecuación vectorial de la recta.**—En la expresión vectorial

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v} \qquad [1]$$

demos a t todos los valores reales, siendo **a** y **v** dos vectores dados. Se obtiene así un conjunto de vectores **x**, al que corresponde un conjunto de puntos del plano que denominamos con el nombre de **recta** (fig. 12).

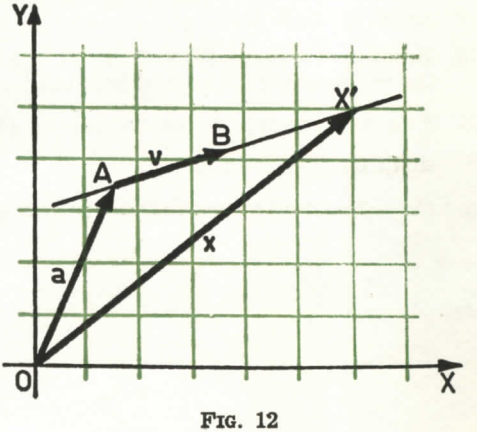


FIG. 12

Así, al valor $t = 0$ corresponde el punto A, homólogo del vector a; al valor $t = 1$ corresponde el punto B, homólogo del $\mathbf{a} + \mathbf{v}$; para un valor t cualquiera, sabemos que $t\mathbf{v}$ es un vector que tiene la misma dirección que el v, y el mismo o distinto sentido, según que t sea positivo o negativo. (Véase nuestras Matemáticas Quinto Curso.)

Por tanto, los puntos A, B, ..., X′ se obtienen llevando a partir de A, en uno y otro sentido, vectores que tienen todos la misma dirección. Dichos puntos están, pues, alineados.

El vector v define la dirección de la recta [1], por lo que se le llama **vector director** de la misma.

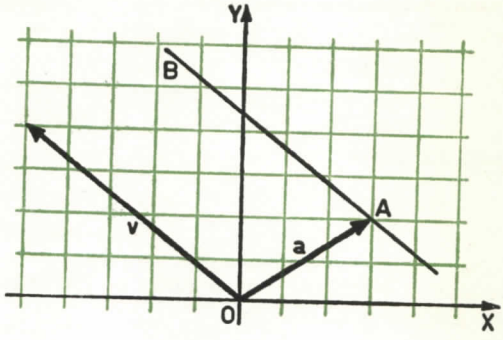


FIG. 13

EJEMPLO. Si $a(3, 2)$ y $v(-5, 4)$, la recta

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$$

está representada en la figura 13. Es la recta AB.

37. Ecuaciones paramétricas de la recta.—Si las componentes de los vectores son (fig. 12) $\mathbf{x}(x, y)$, $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{v}(v_1, v_2)$, es evidente que las componentes de $t\mathbf{v}$ son (tv_1, tv_2). Luego las del vector x valen

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + tv_1 \\ y &= y_1 + tv_2 \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Estas son las **ecuaciones paramétricas** de la recta, o en función del parámetro t. Dan los valores (x, y) de las coordenadas de un punto cualquiera X′ de la recta, conocidas las componentes de los vectores a y v, en función del parámetro t. A cada valor de este último le corresponde un valor para x y otro para y.

EJEMPLOS: 1.º En el caso particular del número anterior (fig. 13) las ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 - 5t$$
$$y = 2 + 4t$$

2.º *Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto* A(3, 2) *y tiene por vector director el* v(−1, 1). Las componentes de a son las coordenadas de A, o sea a(3, 2). Luego las ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 - t$$
$$y = 2 + t$$

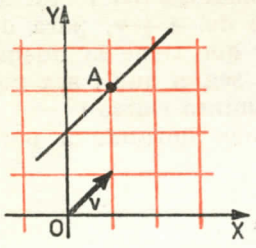


FIG. 13 a

3.º *Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto* A(1, 3) *y forma con el eje* OX *un ángulo de* 45° (fig. 13 a).

El vector v indica sólo la dirección, por lo que se le puede atribuir el módulo o intensidad que se desee. Se puede suponer que v es el vector de componentes (1, 1). A su vez el vector a tiene de componentes (1, 3). Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 1 + t$$
$$y = 3 + t$$

38. **Ecuación general de la recta.**—Partiendo de las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + tv_1 \\ y &= y_1 + tv_2 \end{aligned}\right\}$$

vamos a eliminar entre ellos el parámetro t. Para ello despejemos t en ambas ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_1}{v_1} \quad ; \quad t = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Igualando estos valores, se obtiene

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \qquad [3]$$

que es la *ecuación continua* de la recta; v_1 y v_2 se llaman *parámetros directores* de la misma.

La ecuación [3] puede escribirse, quitando denominadores:

$$v_2 x - v_2 x_1 = v_1 y - v_1 y_1 \quad ; \quad v_2 x - v_1 y + v_1 y_1 - v_2 x_1 = 0$$

Si llamamos

$$A = v_2 \ , \quad B = -v_1 \ , \quad C = v_1 y_1 - v_2 x_1$$

queda

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \qquad [4]$$

que es la *ecuación general* de la recta. Observa que en ella A, B y C son números conocidos, mientras que x, y son las variables. A cada valor que demos a x, la ecuación [4] nos permite obtener el valor de y correspondiente, siendo (x, y) un punto de la recta.

Recíprocamente, dada una ecuación de la forma [4], para pasar a la forma [1] basta tomar el vector $\mathbf{v}(v_1\, v_2)$ de componentes

$$v_1 = -B \quad ; \quad v_2 = A$$

y dos números x_1 e y_1, que verifiquen la igualdad

$$v_1 y_1 - v_2 x_1 = C \qquad [5]$$

con lo que conocemos los vectores $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ y queda determinada la recta

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$$

Al elegir el punto (x_1, y_1) se puede tomar libremente cualquier punto que satisfaga la ecuación [5] de dos incógnitas, o sea se puede dar un valor arbitrario a x_1, y obtener el correspondiente de y_1, despejando en dicha ecuación.

EJEMPLOS: 1.º *Halla la ecuación general de la recta que pasa por* $A(3, -2)$ *y cuya dirección viene dada por el vector* $\vec{v}(2, 1)$.

Las ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 + 2t$$
$$y = -2 + t$$

Eliminando t:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} \quad ; \quad x - 3 = 2y + 4$$

$$x - 2y - 7 = 0$$

es la ecuación general de la recta.

2.º *Halla la ecuación general de la recta cuya ecuación vectorial es* $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ *siendo* $\mathbf{a}(1, -2)$ *y* $\mathbf{v}(-1, 3)$.

Partiendo de la ecuación continua [3] y sustituyendo valores

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3}$$

Quitando denominadores, obtenemos la ecuación general:

$$3x - 3 = -y - 2 \quad ; \quad 3x + y - 1 = 0$$

39. Ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.—La ecuación [3] de la recta pudo también haberse escrito

$$y - y_1 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_1) \qquad [6]$$

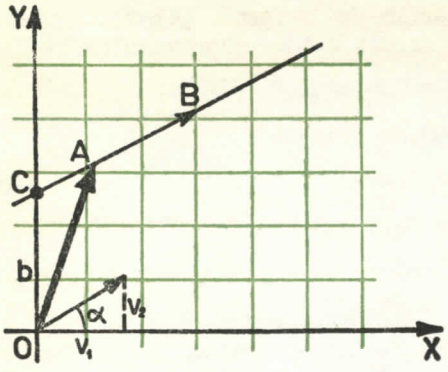


FIG. 14

que se llama la *forma punto-pendiente* de la ecuación de la recta, porque $A(x_1, y_1)$ es un punto de la recta y el cociente

$$\frac{v_2}{v_1} = m \qquad [7]$$

se llama **pendiente** de la recta.

La pendiente de una recta, según se ve en la figura 14, representa la tg α, o tangente trigonométrica del ángulo que forma el vector v con el vector **OX**.

Sustituyendo el valor [7] en la ecuación [6] resulta

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad [8]$$

EJEMPLO.—*Halla la ecuación de la recta que pasa por* A(2, 4) *y forma un ángulo de 45° con* **OX**.

Es $m = \text{tg } 45° = 1$. La ecuación pedida es

$$y - 4 = 1(x - 2)$$

40. **Casos particulares.**—*Si la recta es paralela a* OX, será $m = 0$, y su ecuación es:

$$y - y_1 = 0\,(x - x_1)$$

o sea,

$$y - y_1 = 0 \quad ; \quad y = y_1$$

Si la recta es paralela a OY, $m = \infty$ y su ecuación es

$$\frac{y - y_1}{m} = x - x_1$$

o sea,

$$0 = x - x_1 \quad ; \quad x = x_1$$

En la figura 15 se han representado las rectas $x = 2$, $y = \frac{7}{4}$.

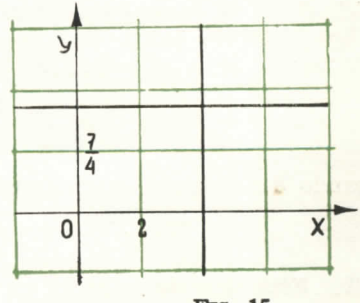


FIG. 15

EJEMPLO.—*Hallar la ecuación de la recta de pendiente* $-\frac{2}{3}$ *y que pase por el punto* (5, 7).

Solución: Sustituyendo en la fórmula [8], tenemos:

$$y - 7 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

de donde

$$3y - 21 = -2x + 10 \ ;$$

$$\boxed{2x + 3y - 31 = 0}$$

41. Forma explícita de la ecuación de la recta.—Si el punto A se toma en C (0,*b*), donde la recta corta el eje OY (fig. 14), la ecuación [8] toma la siguiente forma:

$$y - b = m\,(x - 0)$$

o sea,

$$\boxed{y = mx + b,} \qquad [9]$$

donde *m* es la *pendiente* o *coeficiente angular* de la recta, y *b* es la *ordenada en el origen.*

42. Pendiente de una recta que pasa por dos puntos.—*La pendiente* m *de una recta que pasa por dos puntos* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ *viene dada por la razón:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En efecto, de la figura 16 tenemos:

$$\boxed{m = \text{tg}\ \alpha = \frac{HP_2}{P_1H} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad [10]$$

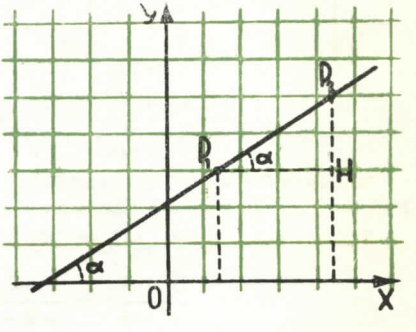


FIG. 16

EJEMPLO.—*Hallar la inclinación y pendiente de una recta que pasa por los puntos* $P_1(1, 2)$ *y* $P_2(3, 7)$.

Será

$$m = \text{tg}\ \alpha = \frac{7 - 2}{3 - 1} = \frac{5}{2}$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{5}{2} = 68^\circ\ 12'$$

Interesa a veces hallar la pendiente y las coordenadas en el origen de las rectas de la forma [4]. La *pendiente* se halla despejando y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Comparándola con la $y = mx + b$, se ve que

$$\mathbf{m = -\frac{A}{B}} \quad , \quad \mathbf{b = -\frac{C}{B}} \qquad [11]$$

La pendiente es el coeficiente de x *cuando está* y *despejada.*

Las *coordenadas en el origen* se determinan haciendo sucesivamente $y = 0$, $x = 0$, en la ecuación [1]; así sale:

$$\mathbf{a = -\frac{C}{A}} \quad , \quad \mathbf{b = -\frac{C}{B}} \qquad [12]$$

43. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.—Si una recta está determinada por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

según el número anterior, y sustituyendo este valor de m en la fórmula [8], sale:

$$\mathbf{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad [13]$$

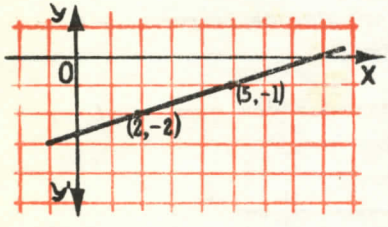


FIG. 17

EJEMPLO.—*Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $P_1(5, -1)$ *y* $P_2(2, -2)$ (fig. 17).

Según la fórmula [13] se tiene:

$$\frac{y + 1}{x - 5} = \frac{-2 + 1}{2 - 5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

o sea:

$$x - 5 = 3y + 3$$

$$\mathbf{x - 3y - 8 = 0}$$

44. Ecuación canónica de la recta, o en función de las coordenadas en el origen.—Si la recta dada corta al eje OX en el punto (a, o) y al eje OY en el punto (o, b), la fórmula [13] se escribe:

$$\frac{y-o}{x-a}=\frac{b-o}{o-a}=-\frac{b}{a}$$

Quitando denominadores, trasponiendo y dividiendo por ab, tenemos:

$$ay=-b(x-a)=-bx+ab$$
$$bx+ay=ab$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad [14]$$

Los segmentos a y b se denominan las *coordenadas en el origen* de la recta: a es la *abscisa en el origen*, y b la *ordenada en el origen*.

EJERCICIOS

1. Traza las siguientes rectas:
   a) $x=0$ *c)* $y+4=0$ *e)* $x-6=0$
   b) $y=0$ *d)* $y=5$ *f)* $x+7=0$

2. Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:
   a) *De pendiente* $-\frac{1}{4}$ y que pasa por $(3, -2)$.
   b) De pendiente $\frac{2}{3}$ y que pasa por $(3, -2)$.
   c) De pendiente 2 y que pasa por $(-3, 1)$.
   d) De pendiente $-\frac{5}{7}$ y que pasa por $(-1, -2)$.

3. Calcula las ecuaciones de las siguientes rectas en la forma punto-pendiente:
   a) Que pasa por el punto $(3, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(-1, -7)$.
   b) Que pasa por $(3, 0)$ y es paralela a la recta que pasa por $(2, 1)$ y $(4, -3)$.
   c) Que pasa por $(-3, 6)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-3, -4)$ y $(5, -1)$.

4. Halla la ecuación de las rectas siguientes:
   a) La que pasa por $(0, 0)$ y $(8, 2)$.
   b) Que pasa por $(5, 3)$ y $(-1, 5)$.
   c) Que pasa por $(-1, -2)$ y $(-3, 5)$.
   d) Que pasa por $(3, 4)$ y $(-4, -3)$.

5. Determina el valor de k de modo que:

   a) $3kx + 5y + k - 2 = 0$ pase por el punto $(-1, 4)$.
   b) $4x - ky - 7 = 0$ tenga la pendiente 3.
   c) $kx - y = 3k - 6$ corte al eje de las x en el punto $(5, 0)$.

6. Halla la ecuación de las rectas que tienen de pendiente $-\frac{3}{4}$ y forman con los ejes de coordenadas un triángulo de área 24 unidades cuadradas.

7. Halla las ecuaciones de las medianas de un triángulo cuyos vértices son A(5, 3), B(7, −1), C(3, −3). Halla su punto de intersección.

8. Los vértices de un triángulo son A(2, 0), B(3, 2), C(4, −3); halla las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección.

9. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las rectas $x - 2y + 3 = 0$ y $x + 2y - 9 = 0$

10. Halla las ecuaciones de los lados de un triángulo cuyos vértices son A(−3, 2), B(3, −2) y C(0, −1).

11. Escribe las ecuaciones de las rectas cuyas coordenadas en el origen son las siguientes:

   a) 4, −1 *c)* $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ *e)* $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}$

   b) −2, −3 *d)* $\frac{6}{5}$, 3 *f)* −1, 3.

12. Reduce las ecuaciones siguientes a la forma canónica y traza las rectas.

   a) $3x + 2y = 6$ *d)* $3x - y + 3 = 0$
   b) $5x + 2y = 20$ *e)* $5x + 2y - 6 = 0$
   c) $x - 2y + 5 = 0$ *f)* $4x - 5y + 7 = 0$

13. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los vectores a(1, 5) y v(3, −7).

14. Halla la ecuación de la recta que pasa por (5, 8) y forma con OX un ángulo de 45°.

15. Halla la ecuación de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (8, 0) y (0, −3).

16. Halla la pendiente y las coordenadas en el origen de la recta $5x - 2y + 10 = 0$.

17. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por (5, −7) y cuya pendiente es la de la recta $2x - 3y + 8 = 0$?

5

Problemas de incidencia, alineación y paralelismo

45. **Incidencia de punto y recta.**—Por definición, un punto está en una recta *si sus coordenadas satisfacen la ecuación de dicha recta.*

Así el punto $(2, -3)$ está en la recta $5x + 2y - 4 = 0$, porque

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 4 = 10 - 6 - 4 = 0$$

Se dice que el punto es *incidente* con la recta.

En cambio, el punto $(2, 5)$ no es incidente con dicha recta, porque

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 4 = 10 + 10 - 4 \neq 0$$

Para hallar la ordenada de un punto de una recta, *conocida su abscisa,* se sustituye el valor de la abscisa dada en el lugar de x en la ecuación de la recta, y luego se despeja y.

Análogamente podemos hallar la abscisa dada la ordenada.

EJEMPLO.—*En la recta* $4x - 3y + 8 = 0$, *halla el punto de abscisa* $x = 3$. Es

$$4 \cdot 3 - 3y + 8 = 0 \quad ; \quad 3y = 12 + 8 = 20$$

$$y = \frac{20}{3}$$

Es el punto $\left(3, \frac{20}{3}\right)$.

46. **Intersección de dos rectas.**—Los puntos de intersección de dos líneas son puntos cuyas coordenadas *satisfacen las ecuaciones de ambas,* y son los únicos puntos que satisfacen dicha condición. Luego, *para hallar los puntos de intersección de dos rectas, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de ambas.*

EJEMPLO.—*Halla la intersección de las rectas*

$$2x - 5y + 7 = 0$$
$$5x + 4y + 1 = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por 2, queda

$$\left.\begin{aligned} 10x - 25y + 35 &= 0 \\ 10x + 8y + 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ restando}$$

$$-33y + 33 = 0 \quad ; \quad y = 1$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación, resulta

$$10x - 25 \cdot 1 + 35 = 0 \quad ; \quad 10x = 25 - 35 = -10 \quad ; \quad x = -1$$

El punto de intersección es el $(-1, 1)$.

En general, si se trata de dos rectas cualesquiera dadas en su forma general, o sea

$$\left.\begin{aligned} A\,x + B\,y + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

multiplicando la primera por A' y la segunda por A, resulta

$$\left.\begin{aligned} AA'x + BA'y + CA' &= 0 \\ AA'x + AB'y + AC' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ restando } (A'B - AB')\,y + A'C - AC' = 0$$

$$y = \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'} = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}$$

Multiplicando la primera por B' y la segunda por B, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} AB'x + BB'y + CB' &= 0 \\ A'Bx + BB'y + C'B &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ restando } (AB' - A'B)\,x + B'C - BC' = 0$$

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}$$

El punto de intersección es

$$\left(\frac{BC' - B'C}{AB' - A'B} \quad , \quad \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B} \right).$$

Se pueden presentar tres casos:

1.º **El denominador es distinto de cero.**—El sistema tiene una sola solución; es compatible y determinado. *Las rectas tienen un solo punto común:* son *secantes.*

2.º **Numeradores y denominador son nulos.**

$$BC' - B'C = 0 \quad ; \quad AB' - A'B = 0$$

o sea,

$$\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad ; \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

Se verifica que

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = k \qquad [2]$$

Las dos ecuaciones [1] se deducen una de otra multiplicando por el número k. Son dependientes una de otra, y el sistema es indeterminado: tiene infinitas soluciones. Todos los puntos que satisfacen a la primera ecuación, satisfacen también a la segunda. Las dos rectas son *coincidentes.*

Dos rectas son coincidentes cuando los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son proporcionales.

3.º El denominador es nulo y no lo son los numeradores

$$AB' - A'B = O; \qquad [3]$$

$$BC' - B'C \neq 0 \quad ; \quad AC' - A'C \neq 0 \qquad [4]$$

El sistema *no tiene solución,* ya que la división por cero es imposible. Las rectas, por tanto, no se cortan: son *paralelas.*

Las condiciones [3] y [4] se transforman así

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Dos rectas son paralelas cuando los coeficientes de las incógnitas son proporcionales, no siéndolo los términos independientes.

EJEMPLOS: 1.º Las rectas

$$3x - 4y + 8 = 0$$
$$6x - 8y + 5 = 0$$

cumplen la condición

$$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{8}{5};$$

luego son paralelas.

2.º Las rectas

$$4x - 2y = 10$$
$$2x - y = 5$$

cumplen la condición

$$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = \frac{10}{5};$$

luego son coincidentes.

47. Ecuación de la paralela a una recta dada desde un punto dado Sabemos que si dos rectas, dadas en su forma general, son paralelas, se verifica que

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \qquad [5]$$

En la práctica para el trazado de paralelas convendrá tomar la constante de proporcionalidad de [5] lo más sencilla posible, por tanto, igual a 1. O sea:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1.$$

Resulta que entonces sería $A = A'$, $B = B'$. Luego, dada la ecuación $Ax + By + C = 0$, la de la otra recta paralela a ella es:

$$Ax + By + K = 0; \qquad [6]$$

la constante K debe ser determinada por una condición adicional.

EJEMPLO 1.º *Hallar la ecuación de una recta que pasa por* $(-2, 3)$ *y es paralela a* $3x - 5y + 6 = 0$.

Solución: La ecuación pedida, según la fórmula [6], es:

$$3x - 5y + K = 0$$

Y ya que esta recta ha de pasar por $(-2, 3)$, debe tenerse:

$$3(-2) - 5 \cdot 3 + K = 0$$

Restando la 2.ª de la 1.ª:

$$3(x + 2) - 5(y - 3) = 0$$

o sea, efectuando:

$$3x - 5y + 21 = 0.$$

Generalizando este método tenemos: las paralelas a la recta $Ax + By + C = 0$ vienen dadas por:

$$Ax + By + K = 0 \qquad [7]$$

Si la paralela pedida pasa por (x_1, y_1), sus coordenadas satisfacen a la ecuación [7]. Luego:

$$Ax_1 + By_1 + K = 0 \qquad [8]$$

Restando [8] de [7], queda:

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0} \qquad [9]$$

que es la ecuación general de una recta paralela a otra dada $Ax + By + C = 0$, y que pasa por el punto dado (x_1, y_1).

EJEMPLO 2.º *Desde el punto* $P(3, 2)$ *trazar una paralela a* $5x + 2y - 5 = 0$

Solución: La paralela es:

$$5(x - 3) + 2(y - 2) = 0$$

o sea,

$$5x + 2y - 19 = 0$$

48. Condición de alineación de tres puntos.—Sean los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$. La ecuación de la recta determinada por las dos primeras es

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Para que $C(x_3, y_3)$ esté alineado con A y B debe cumplirse que

$$\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \qquad [10]$$

EJEMPLO.—Los puntos A(0, 4), B(— 6, — 2) y C(6, 10) están alineados, ya que

$$\frac{6 - 0}{10 - 4} = \frac{-6 - 0}{-2 - 4} \quad ; \quad \frac{6}{6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

EJERCICIOS

1. Traza las siguientes rectas y halla su pendiente:
   - *a)* $5x + 2y - 7 = 0$
   - *b)* $3x - 7y + 25 = 0$
   - *c)* $2x - 3y = 0$
   - *d)* $3x + 2y = 0$
   - *e)* $y - 4x = 0$
   - *f)* $x - 3y = 0$.

2. Halla las ecuaciones generales de las rectas, para las cuales:
   - *a)* $m = 2,\ b = 3$
   - *b)* $m = -\frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$
   - *c)* $\alpha = \frac{\pi}{4},\ b = -2.$
   - *d)* $\alpha = \frac{3\pi}{4},\ b = 3.$

3. Elige pares de rectas paralelas entre las siguientes:

$$R_1 : y = 2x - 3.$$
$$R_2 : y = -3x + 2.$$
$$R_3 : y = 2x + 7.$$
$$R_4 : y = \frac{1}{3}x + 4.$$

4. Una recta determina coordenadas en el origen iguales, y pasa por el punto (7, 3). Halla su ecuación.

5. Una recta determina coordenadas en el origen iguales, y pasa por el punto (— 2, 1). Halla su ecuación.

6. Las coordenadas en el origen de una recta son iguales y de signos opuestos; la recta pasa por el punto (— 3, — 4). Halla su ecuación.

7. La ordenada en el origen de una recta es doble que la abscisa en el origen; la recta pasa por (4, —3). Halla su ecuación.

8. Halla una ecuación que represente todas las rectas paralelas a:

   a) $y = 2x + 7$. *c)* $y - 5x - 4 = 0$.

   b) $y = -x + 5$. *d)* $2y - 4x + 3 = 0$.

9. Halla la ecuación de la recta paralela a $2x - 3y = 0$, y cuya ordenada en el origen es —2.

10. Demuestra que los siguientes lugares geométricos son rectas, y trázalas:

    a) El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a los ejes X'X e Y'Y están en una razón constante igual a $\frac{2}{3}$.

    b) El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes de coordenadas es siempre igual a 10.

11. El producto de las coordenadas en el origen de una recta es 1; la recta pasa por (6, —1). Halla su ecuación.

12. Una recta pasa por (—4, 1) y forma con los ejes un triángulo de área 1. Halla su ecuación.

13. Un paralelogramo tiene un vértice en el punto (3, 2) y dos de sus lados son $2x + 3y = 7$, $3y - x = 4$. Se desea hallar: 1.º, las ecuaciones de los otros dos lados; 2.º, las coordenadas de los restantes vértices.

14. Halla m y n en las ecuaciones:

$$mx + 2y = 6$$
$$nx + y = 9$$

    sabiendo que las rectas son paralelas, y la última pasa por el punto del eje OX, que dista 3 unidades positivas del origen.

15. Una recta pasa por el punto (3, —1) y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Halla la intersección de esa recta con la parábola $y^2 = 6x$.

16. Halla las ecuaciones de las rectas trazadas por los vértices del triángulo A (—3, 2), B (3, —2) y C (0, —1) que sean paralelas a los lados opuestos. Halla los vértices del nuevo triángulo.

17. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (—2, —4) y cuya suma de segmentos interceptados en los ejes es 3.

18. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 2y + 10 = 0$, y $4x + 3y - 7 = 0$ y por el punto (2, 1).

6

Plano métrico

49. **La Geometría métrica.**—Dos nociones fundamentales no fueron abordadas en la Geometría afín: la comparación de longitudes de vectores de distinta dirección, y la medida de su ángulo.

Son dos nociones de Geometría métrica. Vimos en anteriores capítulos que el cálculo vectorial es un instrumento eficaz para expresar las propiedades afines. Se trata ahora de expresar en lenguaje vectorial las nociones métricas más corrientes, como longitud, distancia, perpendicularidad.

50. **Módulo de un vector.**—Sea $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$ un vector cualquiera, y u un segmento unidad. Si el segmento $AB = a \cdot u$, decimos que a es la longitud o medida del segmento AB con la unidad u.

Pues bien, dicha medida (siempre positiva) es lo que llamamos **módulo** del vector $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$.

Se escribe

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{AB}| = a$$

Por tanto, el módulo de un vector es siempre un número real positivo.

Si, como caso particular, es $a = 1$, decimos que el vector $\mathbf{v}$ es unitario, verificándose que

$$|\mathbf{v}| = 1.$$

El cociente de un vector por su módulo es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector dado, ya que si es

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{a \cdot \mathbf{u}}{a} = \mathbf{u}$$

tenemos

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot \mathbf{u}$$

51. **Sistema cartesiano ortonormal.** Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos vectores unitarios y perpendiculares, y O el origen de coordenadas. Al conjunto $(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ se le llama **sistema cartesiano ortonormal.**

Tomamos como ejes de coordenadas las rectas de origen O y direcciones $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ (fig. 18).

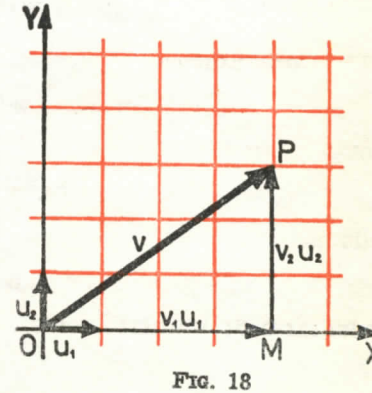


FIG. 18

Cualquier vector $\mathbf{v}$ del plano $(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ tiene un representante de origen O. Sea, por ejemplo, $\mathbf{v} = \mathbf{OP}$. Se verifica que

$$\mathbf{OP} = \mathbf{v} = \mathbf{OM} + \mathbf{MP} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2$$

y los números (v_1, v_2) son las coordenadas de P, o las componentes de **OP**.

52. **Producto escalar de dos vectores.**—Llamamos *producto escalar de dos vectores* no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ al número real que se obtiene multiplicando los módulos de ambos por el coseno del ángulo que forman (fig. 19).

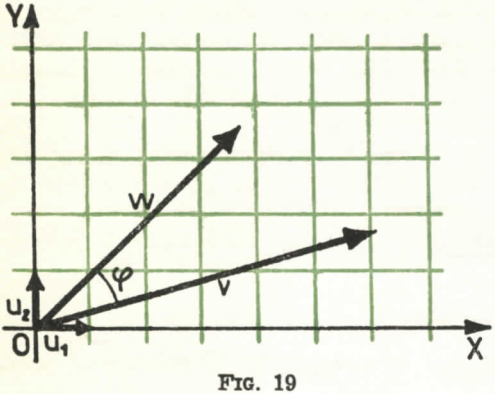


FIG. 19

Se escribe así:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cdot\cos\varphi = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cdot\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Como se ve, el producto escalar de dos vectores no es otro vector, sino un escalar, o sea, un número real. Por tanto, ésta no es una operación o ley de composición interna, sino externa.

El producto escalar de dos vectores tiene las siguientes *propiedades:*

1.ª Si uno de los vectores es nulo, el producto escalar es nulo, e igualmente si los vectores son perpendiculares, pues en este caso

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

2.ª *Conmutativa*

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{w}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

y como

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \cos(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

y además

$$|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}| = |\mathbf{w}|\cdot|\mathbf{v}|$$

por tratarse de números reales, se tiene

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$$

3.ª *Distributiva respecto a la adición vectorial.* Las proyecciones sobre **OP** de los vectores $\mathbf{OQ} = \mathbf{w}$ y $\mathbf{QR} = \mathbf{u}$ son (figura 20) OT y TS respectivamente. Las medidas algébricas de los vectores **OT**, **TS** y **OS** son:

$$|\mathbf{w}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$|\mathbf{u}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{u}),$$
$$|\mathbf{w}+\mathbf{u}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}+\mathbf{u})$$

Y puesto que $\mathbf{OS} = \mathbf{OT} + \mathbf{TS}$,

$$|\mathbf{w}+\mathbf{u}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}+\mathbf{u}) = |\mathbf{w}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + |\mathbf{u}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

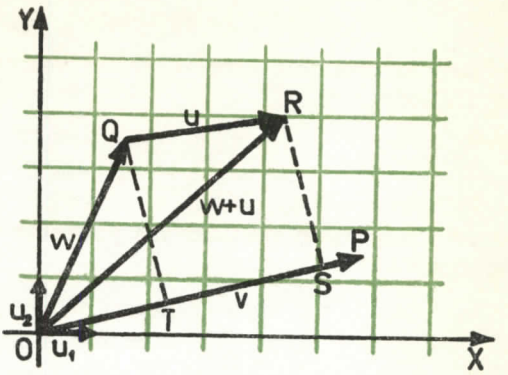


FIG. 20

Si multiplicamos ambos miembros por $|\mathbf{v}|$, resulta

$$|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}+\mathbf{u}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}+\mathbf{u}) = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{u}|\cos(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

o sea

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{u}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$

53. Consecuencias.—1.ª El producto escalar de un vector cualquiera **v** por sí mismo será

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\ (\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

esto es

$$\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2\cdot\cos\ 0° = |\mathbf{v}|^2$$

y por tanto, podemos escribir

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2}$$

No se crea que en el segundo miembro se puede sacar simplemente la raíz cuadrada suprimiendo el exponente 2, porque $\mathbf{v}^2$ no tiene el sentido ordinario de cuadrado de un número al multiplicarlo por sí mismo, sino de cuadrado de un vector al multiplicarlo *escalarmente* por sí mismo. Esto hay que tenerlo muy en cuenta, pues de otro modo llegaríamos al resultado contradictorio de que un número $|\mathbf{v}|$ es igual a un vector **v**.

2.ª El producto escalar de los dos vectores unitarios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ vale

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot 0 = 0$$

3.ª El producto escalar de un vector unitario por sí mismo vale la unidad:

$$\mathbf{u}_1^2 = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_1| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$\mathbf{u}_2^2 = |\mathbf{u}_2| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

54. Expresión analítica del producto escalar de dos vectores.—Sean (número 51):

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2$$

los dos vectores. Aplicando la propiedad distributiva del producto escalar y teniendo en cuenta las consecuencias 2.ª y 3.ª del número anterior, resulta

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2) \cdot (w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2) =$$
$$= v_1 \cdot w_1 \cdot \mathbf{u}_1^2 + v_1w_2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + v_2w_1\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + v_2w_2\mathbf{u}_2^2$$

o sea

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2} \qquad [1]$$

En particular

$$\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos 0° = |\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

y por tanto

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \qquad [2]$$

que nos da el *módulo de un vector en función de sus componentes.*

EJEMPLOS: 1.º *Si* $\mathbf{v}(3, 4)$ *y* $\mathbf{w}(8, -5)$, *halla* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
Se tiene, según [1]:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-5) = 24 - 20 = 4$$

2.º *Si* $\mathbf{v}(5, -4)$, *halla el módulo de dicho vector.*
Se tiene, según [2]:

$$|v| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

55. Distancia entre dos puntos.—Sean dos vectores libres $\mathbf{OP} = \mathbf{v}$, y $\mathbf{OQ} = \mathbf{w}$. Se sabe que (fig. 20 a)

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ}$$

y por tanto que

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} - \mathbf{OP} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$$

Pues bien, se llama **distancia entre los puntos** P y Q al módulo del vector $\mathbf{w} - \mathbf{v}$:

$$d(PQ) = |\mathbf{w} - \mathbf{v}|$$

Si es

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + y_1\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{w} = x_2\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2$$

tendremos

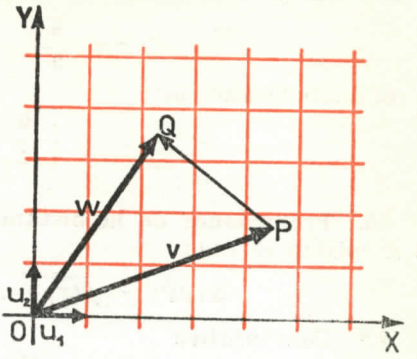


FIG. 20 a

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{u}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{u}_2$$

y por tanto

$$d(PQ) = |\mathbf{w} - \mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad [3]$$

en virtud de la fórmula [2].

EJEMPLO 1.º—*Hallar la distancia entre los puntos* A (3, 2) *y* B (—5, 4) (figura 21).

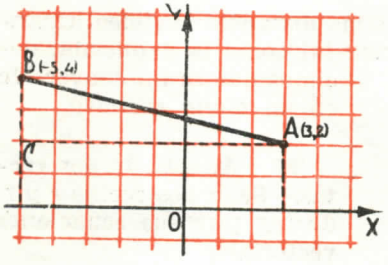


FIG. 21

Solución: Por la fórmula [3] o bien directamente de la figura 21, sale:

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (4-2)^2} =$$

$$= \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

EJEMPLO 2.º—*Hallar las coordenadas de un punto* P *equidistante de tres puntos dados* A (1, 2), B (—1, —2) *y* C (2, —5).

Solución: Sea P (x, y) el punto buscado. Debe tenerse:

$$AP = BP \quad \text{y} \quad BP = CP \qquad [4]$$

Pero:

$$AP = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$
$$BP = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$$
$$CP = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}$$

Luego sustituyendo en las igualdades [4], y elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2$$
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, resulta:

$$x = \frac{8}{3} \quad ; \quad y = -\frac{4}{3}$$

El punto buscado es:

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

56. Propiedades de la distancia.—1.ª La distancia de un punto a sí mismo es nula

$$d\,(\mathrm{PP}) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = 0$$

2.ª *Conmutativa*

$$d\,(\mathrm{PQ}) = d\,(\mathrm{QP})$$

ya que

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_2 - x_1)^2,$$

resultando

$$d\,(\mathrm{QP}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d\,(\mathrm{PQ})$$

3.ª Si P, Q, R son tres puntos distintos, se tiene

$$d\,(\mathrm{PQ}) \leq d\,(\mathrm{PR}) + d\,(\mathrm{QR})$$

Cuando en un plano definimos el concepto de distancia, con las tres propiedades recién mencionadas, decimos que hemos fijado *una métrica* en dicho plano.

La distancia que hemos definido se llama **distancia euclídea.** Cuando en un plano introducimos una métrica tal como la explicada, decimos que se ha convertido en un *plano euclídeo.*

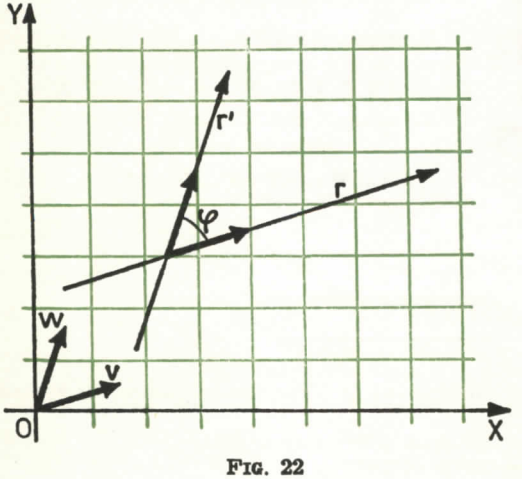


FIG. 22

57. Angulo de dos rectas.—Sean dos rectas r y r' dadas por sus ecuaciones vectoriales

$$r : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{v}$$
$$r' : \mathbf{x}' = \mathbf{a}' + t\mathbf{w}$$

Definimos el *ángulo de dos rectas* como el menor de los ángulos que forman. Por tanto, dicho ángulo es agudo, o a lo más recto (figura 22).

El ángulo formado por

las rectas r y r' es el mismo que el formado por sus vectores directores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Sabemos que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \varphi$$

y por tanto

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \qquad [5]$$

en virtud de las fórmulas [1] y [2], y siendo $\mathbf{v}(v_1, v_2)$, $\mathbf{w}(w_1, w_2)$.

Si queremos expresar estos resultados en función de los coeficientes de las ecuaciones generales de las rectas, o sea de

$$r : Ax + By + C = 0$$
$$r' : A'x + B'y + C' = 0$$

sabemos (núm. 38) que $v_1 = -B$, $v_2 = A$; y análogamente $w_1 = -B'$, $w_2 = A'$. Luego sustituyendo en [5] queda

$$\cos \varphi = \frac{BB' + AA'}{\sqrt{B^2 + A^2} \cdot \sqrt{B'^2 + A'^2}} \qquad [6]$$

EJEMPLOS: 1.º *Halla el ángulo formado por las rectas siguientes, dadas por sus ecuaciones paramétricas:*

$$\left.\begin{matrix} x = 4 + 2t \\ y = 5 - 3t \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 2t \\ y = -3 + 4t \end{matrix}\right\}$$

Los vectores directores son $\mathbf{v}(2, -3)$, $\mathbf{w}(2, 4)$.

Luego aplicando la fórmula [5]:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{4 - 12}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-4}{\sqrt{65}}$$

Ya que φ es un ángulo agudo, $\cos \varphi$ ha de ser positivo. Luego en el doble signo de la raíz del denominador tomaremos signo $-$, para que el cociente sea positivo.

$$\cos \varphi = \frac{4}{8{,}06} = 0{,}4962$$

$$\varphi = \text{arc cos } 0{,}4962 = 60° 15'$$

2.º *Halla el ángulo formado por las rectas*

$$2x + 3y + 5 = 0$$
$$4x - y + 10 = 0$$

Aplicando la fórmula [6], se obtiene

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 4 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{8-3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{221}} = \frac{5}{14{,}89} = 0{,}3365$$

$$\varphi = \text{arc cos } 0{,}3365 = 70^\circ\ 20'$$

58. Condición de perpendicularidad de dos rectas.—Si dos rectas r y r' son perpendiculares, el ángulo que forman es $\varphi = \frac{\pi}{2}$; por tanto $\cos\varphi = 0$, o sea

$$\frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}} = 0$$

Y por tanto, quitando denominadores,

$$\boxed{AA' + BB' = 0} \qquad [7]$$

que es la condición para que dos rectas, en su forma general, sean perpendiculares. Dicha condición puede ponerse en forma de proporción así:

$$\frac{A}{-B'} = \frac{B}{A'} \qquad [8]$$

En la práctica, para el trazado de perpendiculares, convendrá tomar la constante de proporcionalidad de [8] lo más sencilla posible. O sea, igual a la unidad:

$$\frac{A}{-B'} = \frac{B}{A'} = 1 \qquad [9]$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} A = -B' \\ B = A' \end{array}\right\} \quad \text{es decir:} \quad \left.\begin{array}{l} B' = -A \\ A' = B \end{array}\right\} \qquad [10]$$

Dada, por tanto, una recta $Ax + By + C = 0$, la de otra perpendicular a ella es:

$$Bx - Ay + K = 0 \qquad [11]$$

donde K ha de determinarse por una condición adicional.

59. Ecuación de la perpendicular a una recta dada desde un punto dado.—Las rectas perpendiculares a $Ax + By + C = 0$ vienen dadas por:

$$Bx - Ay + K = 0 \qquad [12]$$

Si la perpendicular pasa por (x_1, y_1), sus coordenadas satisfacen a esta ecuación. Luego:

$$Bx_1 - Ay_1 + K = 0 \qquad [13]$$

Restando [13] de [12], queda:

$$\mathbf{B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0} \qquad [14]$$

o también:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}} \qquad [15]$$

que es la ecuación general de una recta perpendicular a otra dada $Ax + By + C = 0$, y que pasa por un punto dado (x_1, y_1).

EJEMPLO.—*Hallar la perpendicular a* $5x + 2y + 8 = 0$, *desde el punto* $(3, 4)$.
Solución: La ecuación de la perpendicular es:

$$2(x - 3) - 5(y - 4) = 0.$$

o sea,

$$\mathbf{2x - 5y + 14 = 0}$$

EJERCICIOS

1. Halla las longitudes de los segmentos que determinan los siguientes puntos:
   a) $(-2, 5)$ y $(-8, -3)$ *b)* $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$
2. Halla las longitudes de los lados de los siguientes triángulos:
   a) $(2, 3)$ $(4, -5)$, $(-3, -6)$ *b)* $(0, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, -b)$
3. Demuestra que los puntos A(3, 8), B(—11, 3) y C(—8, —2), son los vértices de un triángulo isósceles, y halla su área.
4. Demuestra que los puntos A(2, 2), B(—2, —2) y C$(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, son los vértices de un triángulo equilátero, y halla su área.
5. Demuestra que los puntos A(7, 5), B(2, 3) y C(6, —7), son los vértices de un triángulo rectángulo. ¿Cuál es su área?

6. Un extremo de un segmento cuya longitud es 13, es el punto (—4, 8); la ordenada del otro extremo es 3. ¿Cuál es su abscisa?

7. ¿Qué ecuación deben satisfacer las coordenadas (x, y) de un punto, si su distancia al punto (7, —2) es igual a 11?

8. Halla pares perpendiculares entre las siguientes:

$$a)\ \begin{cases} R_1: & 2x - 5y = 8 \\ R_2: & 5y + 2x = 8 \\ R_3: & 35x - 14y = 8 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} R_1: & x + 3y = 0 \\ R_2: & 8x + y + 1 = 0 \\ R_3: & 9x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

9. Halla la ecuación de la perpendicular a la recta $3x + 2y - 8 = 0$ que pasa por el punto (2, —3). Idem, de la paralela.

10. Halla la ecuación de la recta que, siendo perpendicular a la que tiene por ecuación $2y - x = 0$, pasa por el punto (0, —3). Idem, siendo paralela.

11. Calcula los coeficientes m y n de las ecuaciones $mx - 2y = 0$, $nx + 6y = 5$, sabiendo que las rectas que representan son perpendiculares, y la primera pasa por el punto (2, 3).

12. Halla las ecuaciones de las rectas trazadas por los vértices del triángulo A(—3, 2), B(3, —2), C(0, —1) y que sean perpendiculares a los lados opuestos, y demuestra que se cortan en un punto.

13. Halla la ecuación de la recta perpendicular a $4x + y - 1 = 0$, y que pasa por el punto de intersección de $2x - 5y + 3 = 0$, y $x - 3y - 7 = 0$.

14. Halla el ángulo entre las rectas dadas:

$y = 3x - 2$, $\quad x + y = 5$.
$y + x = 5$, $\quad 2x + y - 6 = 0$.
$x + y + 1 = 0$ $\quad x - y + 1 = 0$.

15. Halla el ángulo formado por las rectas

$$\left.\begin{matrix} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x = 3t \\ y = -2 + 5t \end{matrix}\right\}$$

16. Halla el ángulo que forman las rectas

$$\left.\begin{matrix} x = 5 + 2t \\ y = 1 + t \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{matrix}\right\}$$

7

Ecuación normal de la recta

60. Ecuación normal de la recta.—Sea la recta r dada por su ecuación vectorial (fig. 23):

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$$

y sean A (**a**) y P (**x**). Consideremos un vector **w** perpendicular a la recta, y por tanto también al vector director **v**. Sabemos que el producto escalar

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Por otra parte, el vector

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{AP}$$

tiene la misma dirección que **v**; luego también

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \qquad [1]$$

Si $|\mathbf{w}| = 1$, la ecuación anterior recibe el nombre de *ecuación normal* de la recta r.

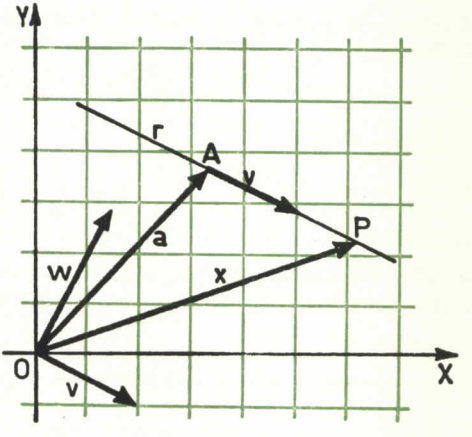


FIG. 23

Caso de ser $|\mathbf{w}| \neq 1$, dividimos por $|\mathbf{w}|$ los dos miembros de [1], resultando

$$\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \qquad [2]$$

y ahora $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ es un vector unitario (número 50). En este caso es [2] la ecuación normal de la recta.

Si nos dan la ecuación de la recta en su forma general,

$$Ax + By + C = 0,$$

sabemos que $A = v_2$, $B = -v_1$ (número 38), siendo $\mathbf{v}(v_1, v_2)$. Por otra parte, llamando $\mathbf{w}(w_1, w_2)$, se ha de cumplir que

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = -w_1 B + w_2 A = 0 \qquad [3]$$

por ser $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$. La relación [3] se satisface tomando

$$w_1 = A \quad ; \quad w_2 = B$$

lo que indica que el vector perpendicular $\mathbf{w}$ tiene de componentes (A, B). Su módulo es $\sqrt{A^2 + B^2}$, y la ecuación normal se obtiene dividiendo los dos miembros por esta expresión, o sea es

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

EJEMPLO.—Dada la recta

$$3x - 4y + 1 = 0$$

la ecuación normal se obtiene dividiendo la ecuación anterior por el módulo de su vector perpendicular (3, —4), que es

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Luego será

$$\frac{3}{5} x - \frac{4}{5} y + \frac{1}{5} = 0$$

61. Distancia de un punto a una recta.—Sea la recta r del número anterior, y queremos hallar la distancia QR de un punto Q dado a dicha recta.

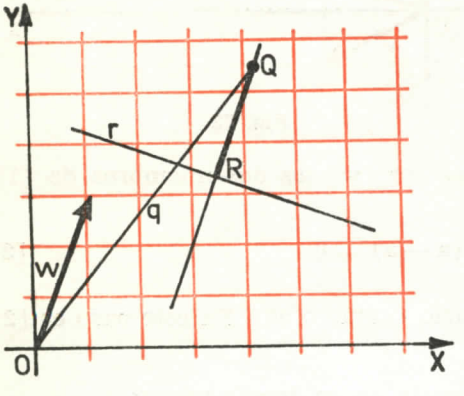


FIG. 24

La ecuación normal de la recta r es (fig. 24):

$$\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \quad [4]$$

La ecuación de la recta QR es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} t \quad [5]$$

ya que es paralela al vector $\mathbf{w}$ y pasa por $Q(q)$.

La intervención de ambas rectas [4] y [5] nos da el punto R tal que $d\,(QR)$ es la distancia buscada. Sustituyendo en [4] el valor de $\mathbf{x}$ dado por [5] resulta

$$\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} t - \mathbf{a} \right) = 0$$

de donde

$$\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}(\mathbf{q}-\mathbf{a})+\frac{\mathbf{w}^2}{|\mathbf{w}|^2}t=0$$

Pero según el número 53 (1.ª), es

$$\frac{\mathbf{w}^2}{|\mathbf{w}|^2}=1$$

y por tanto

$$|t|=\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}(\mathbf{q}-\mathbf{a}) \qquad [6]$$

Pero observemos que, siendo $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}=1$, t mide la distancia entre los puntos **Q(q)** y R(x) ya que de [5] se deduce

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=t\frac{|\mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|}=t$$

Luego la expresión [6] da la distancia QR pedida. Dicha expresión es la misma ecuación normal de la recta r en la que se ha sustituido **x** por **q**. Si la recta r se da en su forma general, bastará reducirla a la forma normal y sustituir las coordenadas generales (x, y) por las particulares del punto $Q(x_1, y_1)$, esto es

$$\mathbf{PQ}=\frac{\mathbf{Ax_1+By_1+C}}{\pm\sqrt{\mathbf{A^2+B^2}}} \qquad [7]$$

Luego, *la distancia de un punto a una recta es igual al primer miembro de la ecuación de la recta en que se han reemplazado las coordenadas generales por las del punto, dividida por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes.*

En el signo de ambigüedad se elige el conveniente para que la distancia a la recta sea siempre positiva, conforme al convenio adoptado de que una distancia sea siempre positiva.

EJEMPLO.—*Hallar la distancia desde el punto* (3, 4) *a la recta* $3x-2y+5=0$.

Aplicando la fórmula [7], tenemos:

$$d=\frac{3\cdot3-2\cdot4+5}{\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

62. **Ecuación de la bisectriz del ángulo de dos rectas.**—Sean las rectas dadas $r_1\equiv A_1x+B_1y+C_1=0$; $r_2\equiv A_2x+B_2y+C_2=0$, y

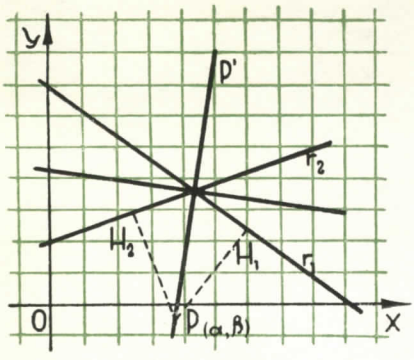


FIG. 25

P (α, β) un punto de la bisectriz. Se verifica (fig. 25):

$$H_1P = H_2P,$$

siendo H_1P y H_2P las distancias de P a las dos rectas. O sea:

$$\frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2\alpha + B_2\beta + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad [8]$$

Como el punto P (α, β), es uno cualquiera de la bisectriz, todos los de ésta satisfarán la ecuación [8], y la ecuación general de la bisectriz será:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad [9]$$

Resultarán dos soluciones, según que se tomen signos iguales o distintos en los radicales. En efecto (fig. 25), las dos rectas forman cuatro ángulos con dos bisectrices distintas y perpendiculares entre sí. Se distinguirá una por el signo de su pendiente.

EJEMPLO 1.º—*Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas*

$$x + y = 2 \quad , \quad x - 7y + 2 = 0$$

(Rectas r_1 y r_2, de la figura 25.)

Solución: Las bisectrices son:

$$\frac{x + y - 2}{\sqrt{2}} = \frac{x - 7y + 2}{\pm\sqrt{50}}$$

siendo una:

$$\frac{x + y - 2}{\sqrt{2}} = \frac{-x + 7y - 2}{5\sqrt{2}} \; ;$$

$$5(x + y - 2) = -x + 7y - 2$$

o sea

$$3x - y = 4$$

Como su pendiente es positiva, ésta será la bisectriz del ángulo que contiene al origen

De modo análogo hallamos la ecuación de la bisectriz del otro ángulo dando al segundo radical signo + :

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{2}} = \frac{+x-7y+2}{5\sqrt{2}};$$

$$5x+5y-10 = x-7y+2$$

o sea:

$$x+3y=3$$

Como su pendiente es negativa, ésta será la bisectriz del ángulo que no contiene el origen.

De este ejemplo y otros parecidos se deduce la siguiente regla, muy útil en muchos casos para distinguir de qué ángulo es bisectriz cada recta:

Cuando de las combinaciones que se pueden hacer con el doble signo ± resulten C_1 *y* C_2 *del mismo signo, la bisectriz que se obtiene es la del ángulo en que está el origen; y si* C_1 *y* C_2 *resultan de signo contrario, la bisectriz que se obtiene es la del ángulo en que no está el origen.*

EJEMPLO 2.º—*Hallar las bisectrices de las rectas*

$$3x-4y+7=0 \quad \text{y} \quad 12x-5y-8=0.$$

Bisectriz del ángulo que contiene el origen:

$$\frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{12x-5y-8}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

o sea:

$$99x-77y+51=0$$

Bisectriz del ángulo que no contiene al origen:

$$\frac{3x-4y+7}{5} = \frac{12x-5y-8}{13}$$

o sea:

$$21x+27y-131=0$$

EJEMPLO 3.º—*Hallar las coordenadas del incentro del triángulo*

$$x-4=0,\ y-3=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$$

Solución: Se sabe que el incentro es el punto de concurso de las bisectrices interiores (fig. 26).

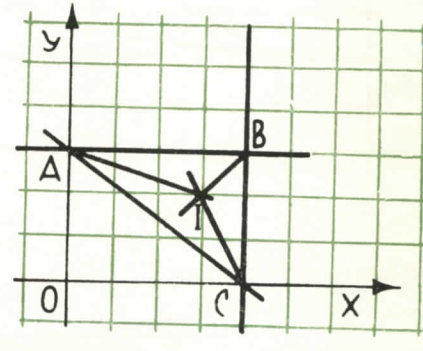


FIG. 26

Bisectriz interior del $\hat{B}$:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{1}$$

por contener al origen. O sea:

$$x - y - 1 = 0 \qquad [10]$$

Bisectriz interior de C:

$$\frac{x-4}{1} = -\frac{3x+4y-12}{5};$$

o sea

$$2x + y - 8 = 0 \qquad [11]$$

por no comprender en su interior al origen.

Hallando la intersección de [10] y [11] obtenemos:

$$x = 3 \quad , \quad y = 2$$

El incentro es el punto (3, 2).

63. Area de un triángulo.—Sea hallar el área de un triángulo ABC, siendo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ (fig. 27).

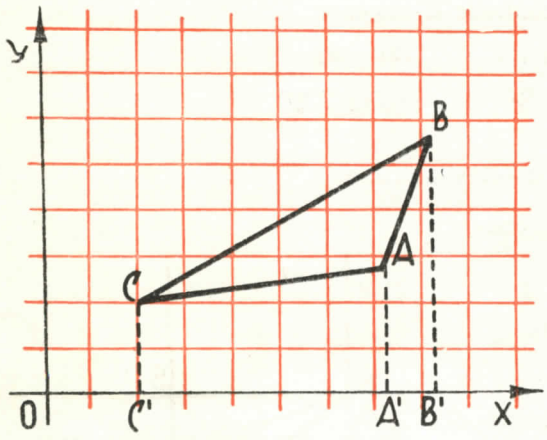


FIG. 27

Si tomamos como base el lado BC, es

$$b = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

La altura h es la distancia de A al lado BC.

Ecuación de la recta BC:

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

o sea

$$(y_3 - y_2)\,x - (x_3 - x_2)\,y - x_2(y_3 - y_2) + y_2(x_3 - x_2) = 0$$

Ecuación normal de BC:

$$\frac{(y_3 - y_2)\,x - (x_3 - x_2)\,y - x_2y_3 + y_2x_3}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = 0$$

La altura del triángulo vale

$$h = \frac{(y_3 - y_2)\,x_1 - (x_3 - x_2)\,y_1 - x_2y_3 + y_2x_3}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

Y finalmente el área del triángulo es

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2}\left[(y_3 - y_2)x_1 + (y_1 - y_3)x_2 + (y_2 - y_1)x_3\right]$$

64. Método de los lugares geométricos.—*Lugar geométrico de los puntos que gozan de una determinada propiedad es una línea que contiene todos los puntos que poseen dicha propiedad, y solamente aquéllos.*

El método de los lugares geométricos tiene por fin *hallar la ecuación de una curva* basándose en alguna propiedad característica de la misma, esto es, en alguna condición que cumplen todos los puntos de dicha curva, y solamente ellos.

El método consiste *en suponer un punto cualquiera de la curva, cuyas coordenadas son, por tanto, genéricas y se indican por* (x, y). Estas coordenadas se someten a la condición o ecuación expresada por la propiedad característica dicha, y el resultado será la ecuación de la curva.

EJEMPLO.—*Hallar la ecuación de la recta que determina sobre los ejes los segmentos* OA = 3 *y* OB = 2, *respectivamente* (fig. 28).

Supongamos un punto P(x, y) en una posición cualquiera sobre la recta. Los triángulos AMP y AOB son semejantes y esto sólo sucede si P está en la recta. Luego si esa propiedad la expresamos por una ecuación que relacione x e y, la ecuación representará la recta.

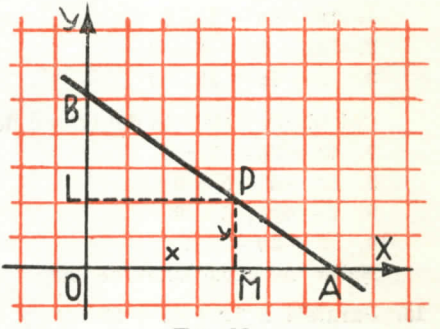


FIG. 28

De la semejanza se deduce que:

$$\frac{MP}{OB} = \frac{MA}{OA}$$

esto es:

$$\frac{y}{2} = \frac{3 - x}{3}$$

de donde:

$$2x + 3y - 6 = 0$$

Comprobación: Si $y = 0$, $x = 3$; si $x = 0$, $y = 2$.

65. Ecuación de la mediatriz de un segmento.—La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los

extremos de dicho segmento. Por tanto, bastará expresar que las distancias de un punto cualquiera de la mediatriz a los extremos son iguales.

EJEMPLO.—*Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento comprendido entre los puntos* $P_1(3, 2)$ *y* $P_2(-1, 5)$.

Solución: Designando con $P(x, y)$ un punto cualquiera de la mediatriz, de coordenadas genéricas x e y (fig. 29), será:

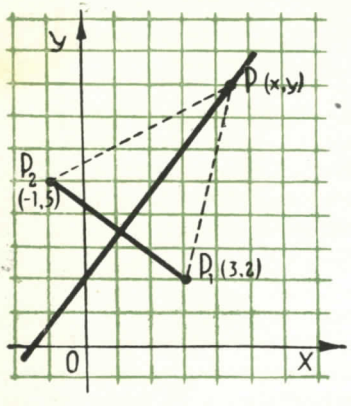


FIG. 29

$$PP_1 = PP_2$$

o sea:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$$

que es la ecuación del lugar.

Elevando al cuadrado y desarrollando los paréntesis, tenemos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = \\ = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$$

o, reduciendo términos:

$$8x - 6y + 13 = 0$$

que nos dice que efectivamente el lugar es una recta, por ser la ecuación de primer grado.

EJERCICIOS

Calcula la distancia del punto (3, 4) a cada una de las siguientes rectas:

1. $3x - 4y - 3 = 0$
2. $12x + 5y - 4 = 0$
3. $8x + 6y + 21 = 0$
4. $3x + 4y = 0$
5. $9x + 12y - 16 = 0$
6. $6x - 8y - 15 = 0$

Calcula la distancia del origen de coordenadas a cada una de las rectas:

7. $4x + 3y - 7 = 0$
8. $3x - y - 5 = 0$
9. $x - 4y + 6 = 0$
10. $5x + 2y + 5 = 0$
11. $y = -5y + 4$
12. $y = 2x - 3$
13. $5x - 4y = 0$
14. $x + 3y = 0$

Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

15. Paralela a $3x + 4y + 25 = 0$, y que pase: *a)* a distancia 2 del origen; *b)* 3 unidades más lejos del origen que la recta dada; *c)* a distancia 1 de la recta dada.

16. Paralela a $x - y = 6$, y que pase: *a)* a distancia 6 del origen; *b)* $2\sqrt{2}$ unidades más lejos del origen que la recta dada; *c)* a distancia $\sqrt{2}$ de la recta dada.

17. Paralela a $2x - 3y = 6$, y a la distancia $2\sqrt{13}$ del punto (3, 1).

18. Paralela a $x + 3y + 4 = 0$, y a la distancia $\sqrt{10}$ de $(-1, 2)$.

19. Una circunferencia de radio 3 es tangente a la recta $2x - 5y = 2$. Halla el lugar geométrico de su centro.

20. Un lado de un cuadrado tiene por extremos $(0, 5)$ y $(3, 1)$. Halla los otros vértices.

21. La base de un triángulo es el segmento cuyos extremos son $(6, 4)$ y $(5, 2)$; el área es $\frac{5}{2}$. Halla el lugar del tercer vértice.

22. Si en el ejercicio 21 el triángulo es isósceles, halla el tercer vértice.

Halla la distancia entre las rectas dadas:

23. $3x - y = 6$, $3x - y = 8$.

24. $x + 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$.

25. Dos lados de un cuadrado están en las rectas $5y = 3x + 4$, $3x - 5y = 5$. Halla el área del cuadrado.

26. Halla el área de un rectángulo limitado por las rectas $x - 2y = 3$, $2x + y + 2 = 0$, $2x + y + 4 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$.

27. Una circunsferencia es tangente a las rectas $4x+y+3=0$, $4x+y-7=0$. Halla el área del círculo y el lugar de su centro.

28. Halla el valor de m de modo que la recta $y = mx + 3$ pase por el punto de intersección de las rectas $y = 2x + 1$ e $y = x + 5$.

29. Una recta pasa por $(4, -2)$ y su distancia al origen es de 2 unidades. ¿Cuál es su pendiente?

30. Un punto equidista de $(3, 2)$ y $(-3, 4)$ y la pendiente de la recta que le une al origen es $\frac{4}{5}$. ¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto?

En los siguientes casos hallar la distancia del punto a la recta:

31. $(3, -5)$, $2x + y + 4 = 0$.

32. $(-2, 3)$, $3x + 4y + 5 = 0$.

33. $(0, 4)$, $x - 3y = 0$.

34. $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, $x + 2y - 4 = 0$.

35. Halla la ecuación de una recta que pase por el punto común a las

$$x + 2y - 1 = 0 \quad , \quad 2x - y + 3 = 0.$$

y diste del punto $(0, 1)$ una longitud igual a $\frac{1}{\sqrt{5}}$

36. Por el punto de intersección de las rectas $2x - y + 2 = 0$, $x - y + 1 = 0$, traza otra recta que forme con los ejes un triángulo de área $\frac{3}{2}$.

37. Halla la ecuación de una recta que pase por el punto (7, 0) y por el punto de abscisa $x = 4$, perteneciente a la recta $5x + 3y - 30 = 0$.

38. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son: $a \equiv 3x + 5y - 16 = 0$, $b \equiv x - y = 0$, $c \equiv 3x + y + 4 = 0$. Halla la distancia de cada lado al vértice opuesto.

39. La base de un triángulo está formada por el segmento que une los puntos $(-3, 1)$ y $(5, -1)$. ¿Cuál es la distancia del tercer vértice (6, 5) a la base?

40. Determina el valor de k, de modo que la recta $8x + 15y + k = 0$ diste 5 unidades del punto (2, 3).

41. Desde un punto $(2, -3)$ se traza una perpendicular a $3x - 4y + 6 = 0$. ¿A qué distancia pasa del punto (6, 8)?

42. Halla la distancia entre las paralelas $y = mx + 3$, $y = mx - 3$.
Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas dadas:

43. $x + y - 2 = 0$, $x + 7y + 8 = 0$.

44. $13x - 9y = 10$, $x + 3y = 6$.

45. $x = 2$, $y = \frac{3}{4}x$.

46. $x = 3$, $y = 5$.

47. Halla el lugar geométrico de los puntos que distan de la recta $12x + 5y - 1 = 0$ doble que del eje OY.

48. Una circunferencia es tangente a las rectas $2x + y = 5$, $x + 2y = 3$. Halla el lugar geométrico de su centro.

49. Una circunferencia es tangente al eje OX y a la recta $5y = 12x$. Halla el lugar geométrico de su centro.

50. Halla el lugar geométrico de los puntos equidistantes del origen y de la recta $x + y = 2$.

51. Halla el lugar geométrico de los puntos que distan del origen doble que de la recta $x - y = 1$.

52. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a las rectas

$$4x - 3y + 4 = 0 \quad , \quad 5x + 12y - 8 = 0$$

es $\frac{13}{5}$.

53. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $x = 1$ es, en valor absoluto, igual al cuadrado de su distancia al punto (1, 0).

54. Halla las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo formado por las rectas $a \equiv 4x - 3y = 12$, $b \equiv 5x - 12y - 4 = 0$, $c \equiv 12x - 5y - 13 = 0$. Demuestra que se cortan en un punto.

55. Halla el área de los triángulos cuyos vértices son

a) (2, 3), (4, −5), (−3, −6).

b) (2, 3), (1, 5), (−1, −2).

c) (3, 4), (0, 0), (4, −3).

56. Halla el área del cuadrilátero cuyos vértices son A(−2, 3), B(−3, −4), C(5, −1), D(2, 2).

8

Funciones de variable real

66. **Concepto de función de variable real.**—En la lección 3.ª de nuestro 5.º Curso de Matemáticas estudiamos las correspondencias entre conjuntos (funciones), y en particular las que llamamos correspondencias unívocas o aplicaciones, en las que a todo elemento del conjunto original X le corresponde un homólogo en el conjunto imagen Y, y sólo uno.

Si consideramos ahora que X es el conjunto R de los números reales, o una parte del mismo, e Y es también el mismo conjunto R de los números reales, u otra parte del mismo, decimos que la correspondencia entre ellos es una *función de variable real.*

Por tanto, cada subconjunto $C \subset R \times R$ define una función de variable real, o correspondencia f del conjunto de los números reales en sí mismo.

Dicha correspondencia indica que cada $x \in R$ tiene como homólogos los números $y \in R$ tales que $(x, y) \in C$.

Esta correspondencia se representa así:

$$x \xrightarrow{f} y \quad ; \quad y = f(x)$$

significándose con ambas expresiones que y es el homólogo o correspondiente de x en dicha función f.

Al conjunto original R se le suele llamar **variable independiente,** representada por la letra x, y al conjunto imagen R se le llama **variable dependiente,** representada por la letra y; sus valores dependen de los que arbitrariamente atribuyamos a x.

Al hablar de funciones nos referiremos siempre a las aplicaciones, o sea a las *funciones uniformes.*

EJEMPLO.—En la fórmula que da el área del círculo

$$S = \pi r^2 \qquad [1]$$

a cada valor arbitrario que demos a r corresponde uno bien determinado para el área S. Diremos que el área es *función* del radio.

Si consideramos todos los círculos posibles trazados en un plano, veremos que en la fórmula [1] la letra r puede tomar todos los valores reales positivos. Se dice que la letra r representa una *variable.* Y si suponemos que los valores que se asignan a r son arbitrarios, a nuestro gusto dentro de su campo de variabilidad, entonces se le llama *variable* independiente. La letra S también podrá tomar todos los valores reales positivos: es otra *variable.* Pero ahora dichos valores vienen determinados por los que hayamos dado a r. Por eso se le llama *variable dependiente* o *función.*

La letra π es una *constante*: vale siempre 3,141592...

Definiremos, por tanto:

Constante *es una letra o símbolo que representa un número fijo y determinado.*

Variable *es una letra o símbolo que representa cada uno de los números de un conjunto.* Dicho conjunto es el *campo de variabilidad* de la variable.

La variable a la cual se le pueden dar valores arbitrarios se llama *variable independiente*. La variable cuyos valores dependen de los que se atribuyen a la anterior se denomina *variable dependiente* o *función*.

Se acostumbra representar la función por la letra y, y la variable independiente por la letra x. De este modo la fórmula [1] se escribirá:

$$y = \pi x^2$$

Las variadas aplicaciones del cálculo tienen como variables el tiempo, la temperatura, la velocidad, la fuerza, la presión de un fluido, la resistencia del aire y otras muchas magnitudes.

EJEMPLOS: 1.º El tiempo necesario para recorrer 50 km con una velocidad constante es función de la velocidad:

$$t = \frac{50}{v}, \text{ que representamos } y = \frac{50}{x} \qquad [2]$$

2.º El coste C de un peso P de turrón es proporcional al peso P; supongamos a 25 pesetas el kg; será:

$$C = 25P, \quad \text{o sea} \quad y = 25x \qquad [3]$$

67. **Intervalo y entorno.**—Puede ocurrir que a una variable se le puedan atribuir todos los valores comprendidos entre dos números reales. Entonces la variable se dice que es *continua*, y su campo de variabilidad se llama *intervalo*. Este puede ser *abierto* o *cerrado*.

El conjunto de los números reales x *tales que* $a < x < b$ *se llama intervalo abierto* y se designa por (a, b).

El conjunto de los números reales x *que cumplen la condición* $a \leq x \leq b$ *se llama intervalo cerrado, y se designa por* $[a, b]$. Así el intervalo de variación de r en la fórmula [1] es el $(0, \infty)$.

En ambos casos los números a, b se llaman *extremos* del intervalo, y la diferencia $b - a$ se llama *amplitud* del mismo.

Representando los números reales en un eje orientado, o *recta real*, un intervalo es el conjunto de los puntos de un segmento, excluidos los extremos si es abierto, e incluidos si es cerrado (fig. 30).

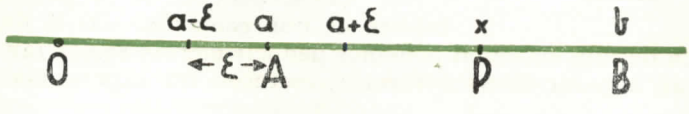


FIG. 30

Al pequeño intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ que deja en su punto medio al punto de abscisa a, se le denomina *entorno* de dicho punto A, siendo ϵ el *radio* del entorno.

Cuando hay que considerar varias funciones distintas de x, se emplean para designarlas diferentes características:

$$y = f(x),\ y = h(x),\ y = g(x),\ y = \varphi(x),\ y = F(x),\ \text{etc.}$$

68. **Representación gráfica de funciones.**—Sea la función:

$$y = x^2 \qquad [4]$$

Si asignamos un valor cualquiera a la variable x, queda determinado el valor correspondiente de y; así hay infinitos pares de valores de x e y que satisfacen a la función. Cada par de números puede representarse por un punto en un sistema de coordenadas cartesianas. Los infinitos puntos así determinados forman una *curva*. Dicha curva se denomina *representación gráfica de la función*.

En nuestro caso asignaremos unos cuantos valores a x, y calculemos los correspondientes valores de y:

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
y	0	1	4	9	16	1	4	9	16

Llevando estos pares de valores y otros muchos intermedios sobre un sistema de coordenadas cartesianas (fig. 31) vemos que los puntos representativos forman una curva, que demostraremos más adelante es una *parábola*.

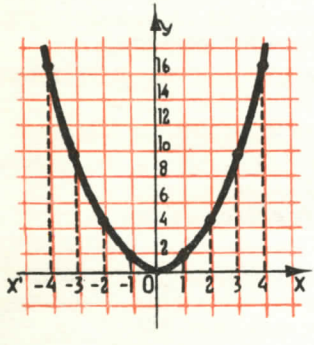


FIG. 31

Gráfica de una función es una línea que contiene todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación que expresa la función, y solamente aquéllos.

Recíprocamente, *ecuación de una línea es aquella relación entre las dos variables* x *e* y *que satisfacen las coordenadas de todos los puntos de la línea, y solamente ellos.*

El estudio de las curvas planas por medio de las ecuaciones que las representan, forma el objeto de la *Geometría Analítica*.

69. **Consecuencias de la definición de gráfica de una ecuación.**—De la definición de gráfica de una ecuación podemos deducir ciertas reglas tan importantes que, a pesar de su evidencia, merecen ser expresadas explícitamente.

Por definición, un punto está en una curva *si sus coordenadas satisfacen la ecuación de la curva.* Esto sugiere las siguientes reglas:

Regla I: Para hallar si un punto está en una curva, se sustituyen sus coordenadas en vez de x *e* y *en la ecuación de la curva.*

EJEMPLO.—*a)* El punto (2, 12) está en la curva:

$$y = 3x^2$$

porque:

$$12 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4$$

el punto $(-1, -5)$ no está en la curva porque:

$$-5 \neq 3 \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 1$$

Regla II: Para expresar analíticamente la condición de que un punto está en una curva, se escribe la ecuación de la curva con las coordenadas del punto en vez de x *e* y.

EJEMPLO.—*b)* El punto (x_1, y_1) estará en la curva:

$$y^2 = 4x$$

si ponemos:

$$y^2_1 = 4x_1$$

c) *Determinar la constante* a *de modo que el punto* $(-2, -3)$ *esté en la curva* $y = ax^2$.

Sustituyendo las coordenadas $(-2, -3)$, tenemos:

$$-3 = 4a \quad \text{o} \quad a = -\frac{3}{4}$$

y la ecuación de la curva es:

$$y = -\frac{3}{4}x^2$$

Regla III: Para hallar la ordenada de un punto de una curva, *conocida su abscisa, se sustituye la abscisa dada en vez de* x *en la ecuación de la curva y luego se despeja* y. Análogamente podemos hallar la abscisa, dada la ordenada.

EJEMPLO.—d) *En la curva* $y = 3x^2$, *hallar el punto de abscisa* $x = 4$.
Será $y = 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$. El punto es el (4, 48).

70. Puntos de intersección de dos líneas.—Los puntos de intersección de dos líneas son puntos cuyas coordenadas *satisfacen las ecuaciones de ambas,* y no hay otros puntos que tengan esta propiedad. Luego, *para hallar los puntos de intersección de dos líneas, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de ambas.*

Puede suceder que todos los valores de x e y obtenidos al resolver el sistema de acuaciones, sean imaginarios; o que el sistema sea incompatible, es decir, no sea satisfecha por ningún par de valores rea-

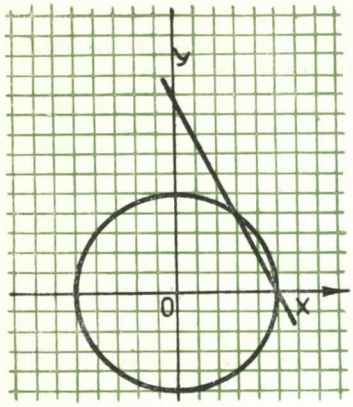


FIG. 32

les ni imaginarios. Evidentemente, en ambos casos el resultado significa que las líneas no se cortan.

EJEMPLO 1.º *Hallar los puntos de intersección de la recta:*

$$2x + y = 10 \qquad [5]$$

y la curva (fig. 32):

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad [6]$$

Solución: Sustituyendo el valor de y obtenido de la [5] en la [6], tenemos:

$$x^2 + (10 - 2x)^2 = 25$$
$$5x^2 - 40x + 75 = 0$$

o:

$$x^2 - 8x + 15 = 0;$$

luego:

$$x = 3 \quad , \quad x = 5.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación [5], se obtiene:

$$y = 4 \quad ; \quad y = 0$$

y los puntos pedidos son: (3, 4), (5, 0).

EJEMPLO 2.º *Hallar los puntos de intersección de las curvas* (fig. 33):

$$2x^2 + 3y^2 = 35 \qquad [7]$$
$$3x^2 - 4y = 0. \qquad [8]$$

Solución: Sustituyendo el valor de x^2 obtenido de la [7] en la [8], tenemos, después de reducir:

$$9y^2 + 8y - 105 = 0;$$

luego:

$$y = 3 \quad , \quad y = -\frac{35}{9}$$

Sustituyendo en [7] y resolviendo:

$$x = \pm 2 \quad ;$$

$$x = \pm \frac{1}{6}\sqrt{-210}$$

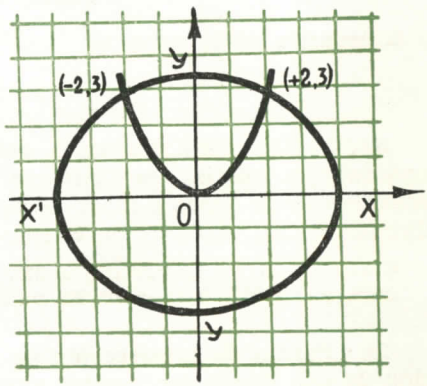


FIG. 33

Ordenando los valores reales, resultan los dos puntos de intersección (+ 2, 3), (— 2, 3).

Se demuestra en Algebra que, cuando dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, el número de soluciones (es decir, el

número de pares de valores de x e y que satisfacen a ambas ecuaciones), no es mayor que el producto de los grados de las ecuaciones. Luego, *el número de puntos de intersección de dos curvas es igual o inferior al producto de los grados de sus ecuaciones.*

71. **Clasificación de las funciones.**—Indicaremos algunas clases de funciones que son de uso muy corriente:

a) *Funciones empíricas.*—Funciones *empíricas* son aquéllas en que su relación de dependencia con respecto a la variable independiente no puede expresarse mediante una fórmula matemática, y cuyas gráficas tienen, por eso, que hallarse sólo por datos experimentales. Por ejemplo, la temperatura de un enfermo en relación con las horas del día, y la tensión del vapor de agua saturado en función de la temperatura.

b) *Funciones analíticas.*—Funciones *analíticas* son aquéllas cuya relación de dependencia respecto a los valores de la variable independiente se puede expresar por una fórmula matemática. Estas funciones se llaman *trascendentes* cuando su relación de dependencia viene dada mediante un logaritmo, una exponencial o una razón trigonométrica, por ejemplo:

$$y = \log x \quad ; \quad y = a^x \quad ; \quad y = \operatorname{sen} x \quad ; \quad y = \operatorname{tg} x$$

Y se llaman *algebraicas* cuando, para calcular el valor de y, la variable x ha de someterse sólo a operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) en número finito, como:

$$y = \frac{7x^2 + \sqrt{6x}}{5x - 3}$$

Las funciones algebraicas se dividen en *irracionales* y *racionales*, según sus fórmulas tengan o no radicales que afecten a la variable. Las racionales se dividen en *fraccionarias* y *enteras*, según que tengan o no denominadores con la variable; y las enteras se subdividen en grados, como $mx + p$, de primer grado; $ax^2 + bx + c$, de segundo grado, etcétera.

Puede resumirse la clasificación que acabamos de hacer en el siguiente cuadro:

- Funciones
  - empíricas
  - analíticas
    - trascendentes
      - exponenciales
      - logarítmicas
      - goniométricas
    - algebraicas ..
      - irracionales
      - racionales
        - fraccionarias
        - enteras
          - 1.er grado
          - 2.º grado
          - 3.er grado

72. Otras clases de funciones.—*a)* FUNCIONES IMPLÍCITAS Y EXPLÍCITAS.—Se denominan *implícitas* aquellas funciones que están ligadas a su variable x por una ecuación no resuelta; tal es la ordenada de la circunferencia dada por la ecuación $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Veces hay en que se puede despejar la variable y; pero también hay otras en que esto no puede hacerse, según enseñan conocimientos superiores.

Explícitas, cuando la función y viene despejada en un miembro, y en el otro aparece el conjunto de operaciones que hay que efectuar con la variable x para obtener la función y. Por ejemplo:

$$y = 4x^3 - 3x^2 + \frac{5x}{7} \quad ; \quad y = \frac{\sqrt{2x}}{5 - x^2} \quad ; \quad y = \frac{\sqrt{x^3 - 2}}{x^2}$$

b) FUNCIONES DIRECTA E INVERSA.—Dada una función $y = f(x)$, se denomina función *inversa* de ella a la función

$$y = f^{-1}(x)$$

que se obtiene despejando en ella x y cambiando la variable y en x, y la variable x en y. La función dada se llama *directa.*

Según el número 29 de nuestras Matemáticas de Quinto Curso, la función inversa equivale a la correspondencia entre el conjunto y considerado como *original* y el conjunto x considerado como *imagen.*

Por ejemplo, dada la función exponencial (directa)

$$y = a^x$$

o sea, $x = \log_a y$, su inversa es

$$y = \log_a x$$

esto es la función logarítmica.

Y dada la función:

$$y = x^2 \quad , \text{ o sea } \quad x = \pm\sqrt{y}$$

admite dos funciones inversas:

$$y = +\sqrt{x} \quad , \text{ e } \quad y = -\sqrt{x}$$

Si para construir la gráfica de una función inversa tomamos para abscisa la ordenada de un punto de la directa, sale como ordenada la abscisa del mismo punto de la directa. Por tanto, *las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.* En efecto: si A y B son, respectivamente, dos puntos correspondientes de la directa e inversa, los triángulos rectángulos AA'O y BB'O son iguales, por ser $OA' = OB'$ y $A'A = B'B$; luego, $\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$

y OB = OA. Por tanto, el triángulo AOB es isósceles, y la bisectriz OH del ángulo AOB es mediatriz del segmento AB, que es lo que deseábamos demostrar (fig. 34).

Por ejemplo, en la figura 31 hemos representado la función $y = x^2$. Sus inversas, las funciones $y = \pm \sqrt{x}$, representan otra parábola cuya directriz es paralela a OY. Ambas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante (fig. 35).

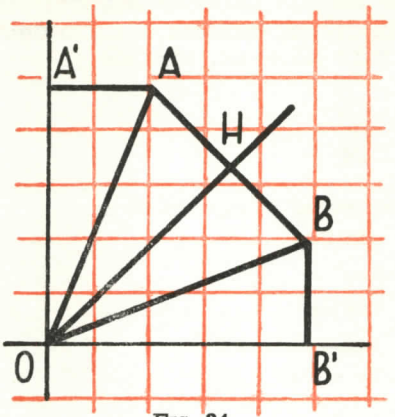


FIG. 34

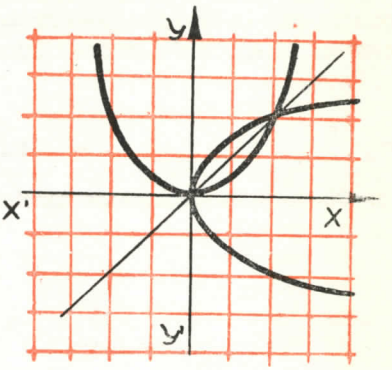


FIG. 35

c) **FUNCIONES PARES E IMPARES.**—Función *par* es aquella que, al cambiar el signo de la variable independiente, no altera ni el valor ni el signo; es decir, para todo valor de x se tiene la igualdad:

$$f(x) = f(-x)$$

EJEMPLOS:

$$y = x^4 + x^2 \quad ; \quad y = \cos x$$

pues:

$$(-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 \quad ; \quad \cos(-x) = \cos x$$

Impar es aquella función que, al cambiar el signo de la variable independiente, no altera en valor, pero sí en signo, verificándose la igualdad

$$f(-x) = -f(x).$$

EJEMPLOS:

$$y = 2x^3 + 7x \quad ; \quad y = \operatorname{sen} x$$

pues:

$$2(-x)^3 + (-x) = -2x^3 - 7x = -(2x^3 + 7x) \quad ; \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

Estos nombres hacen referencia a las potencias de exponente entero, par o impar, ya que si n es par, se tiene:

$$(-x)^n = x^n;$$

pero si n es impar, se verifica:

$$(-x)^n = -x^n$$

Es de notar que hay funciones que no son pares ni impares. Así ocurre con la función $y = 7x + 5$, en la que, al cambiar el signo de x, cambia el signo del primer sumando, pero no el del segundo.

EJERCICIOS

1. Clasifica las siguientes funciones como pares o impares de x:

   a) cotg x
   b) sec x
   c) cosec x
   d) $(x-1)^2 + (x+1)^2$
   e) $(x^3+1)^2 - (x^3-1)^2$
   f) $\dfrac{x}{1+x^2}$
   g) sen $2x$
   h) $\text{sen}^2\, x$
   i) cos $2x$
   j) $x(x-2)(x+2)$
   k) $a^x + a^{-x}$
   l) x sen x

2. Convierte y en función explícita de x en los siguientes casos:

   a) $x^2 + y^2 = a^2$
   b) $x^2y^2 = a^4 + b^4$
   c) $\log y + \log x = \log a$
   d) $y^2 + 2ay - x^2 = 0$
   e) a sen $y + b = cx$
   f) $axy + bx + cy + d = 0$

3. Dadas las funciones siguientes, halla la correspondiente función inversa:

   a) $y = x^4$
   b) $y = 1 + \sqrt{x}$
   c) $y = \text{arc cos } 2x$
   d) $y = a^x$
   e) $y = a\ \text{tg}^2\, x$
   f) $y = \sqrt[n]{a^n - x^n}$
   g) $y = \sqrt{5 - x^2}$
   h) $y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$
   i) $y = \dfrac{4x}{x-1}$
   j) $y = \dfrac{1}{4}\ \log_e (x+1)$

4. Determina si los puntos dados están en la curva dada, en los casos siguientes:

   a) Curva $4x + y = 6$; puntos (1, 2), (2, −1), (4, −10), (0, −6).
   b) Curva $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 5$; puntos (−1, 6), (2, 1), (3, 2).
   c) Curva $x^2 - yx + 2y^2 + 6y = 4$; puntos (2, −2), (−2, 0), (4, 2).

5. Determina el grado de la ecuación: $x(xy - 3) = x^2 + y^2$.

6. Halla el grado de la ecuación siguiente: $y = \dfrac{1}{1+x}$

7. Determina el grado de la ecuación: $(x-1)(y+2) = 3$.

8. Determina k de modo que la recta $x + 2y = k$ pase: *a)* por (4, 1); *b)* por (— 6, — 4); *c)* por (0, 0).

9. ¿Para qué valor de a la curva $y = ax^3$ pasa por (— 1, — 3)?; ¿por (4, 2)?; ¿por (0, 0)?; ¿por (0, 2)?; ¿por (2, 0)?

10. Determina m de modo que la recta $y = mx + 2$ pase: *a)* por (1, 3); *b)* por (2, — 2); *c)* por (0, 2); *d)* por (0, 0).

11. ¿Cuál es la condición para que la curva $y = ax^2 + bx + c$ pase por (0, 0)?; ¿por (2, 1)?; ¿por (— 1, *c*)?

12. Expresa analíticamente que el punto (x_1, y_1) está en la curva $x^2+y^2=9$.

13. ¿En qué caso el punto (p, q) estará en la recta $y = 3x + 5$?

14. Determina A y B de modo que la recta $Ax + By = 1$ pase por los puntos (3, — 2), (1, — 4).

15. Determina a y b de modo que la curva $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ pase por los puntos (1, 2), (— 3, 3).

16. Sobre la curva $y^2 = x^3$, halla: *a)* el punto cuya ordenada es — 1; *b)* los puntos cuya abscisa es 4.

17. Sobre la curva $y^2 = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$, halla los puntos: *a)* cuya abscisa es — 1; *b)* cuya ordenada es — 1; *c)* cuya abscisa es 2.

En los siguientes casos, halla los puntos de intersección de las líneas dadas:

18. $4x + 4y = 5$, $x - 2y + 1 = 0$.

19. $3x + 6y + 1 = 0$, $x - 5y = 2$.

20. $y = 2x + 3$, $4x - 2y = 3$.

21. $3x - y = 0$, $2y - 6x + 3 = 0$.

22. $x^2 + y^2 = 5$, $3x - y = 5$.

23. $x^2 + y^2 = 10$, $2x + 3y = 9$.

24. $x^2 + y^2 = 10$, $3x + y = 10$.

25. $x^2 + y^2 = 17$, $x + 4y = 17$.

26. $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 = 2y + 5$.

27. $y = x^3 - 6x^2 + 4x + 2$, $8x + y = 10$.

28. $y = x^3$, $x + y + 10 = 0$.

29. $y = x^2$, $2x = 3y - y^2$.

30. $y = x^2$, $y^2 + 6x - 7y = 0$.

9

Cálculo de límites indeterminados

73. Límites infinitos.—Supongamos la sucesión

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \qquad [1]$$

Una sucesión como la [1], que crece infinitamente, propiamente carece de límite. Se ha convenido, sin embargo, en decir que su límite es *infinito,* representado por ∞. Que la sucesión $u_n \to \infty$, quiere decir simplemente que sus términos llegan a ser mayores que cualquier número prefijado H por grande que sea.

Por consiguiente, el símbolo ∞ no es un número, y no se le debe someter a las operaciones aritméticas. Cuando escribamos, por ejemplo, $\infty + \infty$, entendemos que es el límite de la suma de los términos correspondientes de dos sucesiones que tienden a ∞.

De un modo análogo se define el símbolo $-\infty$. Así, los términos de la sucesión

$$-1, -2, -3, -5, -7, -11, \ldots$$

formada por los números primos naturales precedidos del signo —, llegan a ser menores que — H, por grande que sea el número positivo H: se dice que el límite de dicha sucesión es $-\infty$.

74. Clasificación de las sucesiones atendiendo al límite.—Una sucesión se llama *convergente* si tiene límite finito; se llama *divergente* si tiene límite infinito, positivo o negativo, y se llama *oscilante* o *indeterminada* si carece de límite.

La sucesión [1] es divergente, y aquí damos de sucesiones oscilantes el siguiente ejemplo:

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}$$

es sucesión oscilante.

75. Propiedades de las sucesiones divergentes. — Cuando se opera con sucesiones divergentes, o sea, cuyo límite es infinito, hay que tener en cuenta las siguientes propiedades:

1. *Si en una suma uno de los sumandos tiende a* $+\infty$, *y los otros tienen límites finitos, la suma tiende a* $+\infty$, Ya que si uno de los su-

mandos llega a ser mayor que cualquier número prefijado H, por grande que sea, lo mismo le ocurre a la suma. Podemos, pues, escribir la igualdad simbólica

$$K + \infty = \infty$$

II. *Si en una suma algebraica uno de los sumandos tiende a* $-\infty$, *y los otros tienen límites finitos, la suma tiende a* $-\infty$, ya que, asociando en un solo número K todos los sumandos de límite finito, el otro sumando llegar a ser menor que $-(H+K)$, por grande que sea H. Luego la suma llega a ser menor que $-H$.

Resulta, por tanto, la igualdad simbólica

$$K - \infty = -\infty$$

III. *Si un factor permanece finito y el otro tiende a* ∞, *el producto tiende a* ∞, escribiéndose simbólicamente

$$K \cdot \infty = \infty$$

La demostración es análoga a las anteriores.

IV. *Si el divisor tiende a cero y el dividendo a un límite finito* K, *el cociente tiende a* ∞; o sea, simbólicamente,

$$\frac{K}{0} = \infty$$

ya que el cociente llega a ser tan grande como se quiera, bastando para ello hacer el divisor tan pequeño como se quiera.

V. *Si el dividendo permanece finito y el divisor tiende a* ∞, *el cociente tiende a cero;* o sea, convencionamente,

$$\frac{K}{\infty} = 0$$

76. **Límites indeterminados.**—Si el dividendo o el divisor tienden simultáneamente a cero o a ∞, nada podemos asegurar respecto al límite del cociente. Se dice que las expresiones simbólicas

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty}$$

son *indeterminadas*. En estos casos tenemos que saber algo más del dividendo y del divisor para poder determinar el límite del cociente.

También son indeterminadas las expresiones simbólicas

$$\infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty$$

77. Límites de expresiones racionales cuando la variable n tiende a infinito.

EJEMPLO 1.º *Hallar*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{3n+1}$$

Si ponemos $n = \infty$ directamente, resulta la expresión simbólica:

$$\frac{2 \cdot \infty + 3}{3 \cdot \infty + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

que es indeterminada. Pero podemos proceder así:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{3n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

ya que

$$\frac{3}{\infty} = 0 \quad , \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

igualdades simbólicas que indican que si el denominador tiende a ∞, el cociente tiende a cero.

Es decir, *el límite del cociente de dos polinomios cuando* n *tiende a infinito, si los grados del numerador y denominador son iguales, es igual al cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.*

Los límites indeterminados de funciones racionales, cuando $n \to \infty$ *se determinan dividiendo numerador y denominador por la potencia más alta de* n *que aparezca en cualquiera de ellos.*

EJEMPLO 2.º *Hallar*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n-5}{5n^2+6}$$

Como anteriormente, poniendo $n = \infty$, obtendríamos la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; pero dividiendo numerador y denominador por n^2 resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n-5}{5n^2+6} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{6}{n^2}} = \frac{0}{5} = 0$$

O sea, *el límite del cociente de dos polinomios cuando* n *tiende a infinito, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, es cero.*

EJEMPLO 3.º *Hallar*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 - 5n + 7}{4n^2 + 9n - 3}$$

Poniendo como antes $n = \infty$ resulta la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, pero dividiendo ambos términos del quebrado por n^2 resulta:

$$\frac{2 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^2}}{\frac{4}{n} + \frac{9}{n^2} - \frac{3}{n^3}}$$

Cuando $n \to \infty$ queda $\frac{2}{0} = \infty$.

Luego *el límite del cociente de dos polinomios, cuando* n *tiende a infinito, si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, es infinito.*

EJERCICIOS

Halla los siguientes límites:

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 2n + 5}{5n^2 + 1}$

2. $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 5}{3n + 1}$

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{3n^2 + n}$

4. $\lim_{n \to \infty} \frac{n^4 - 5n - 7}{6n^3 + 3n^2 + 8}$

Límite de las siguientes expresiones para $n \to \infty$:

5. $\frac{an + b}{cn + b}$

6. $\frac{3x^2 - 5x + 2}{5x^2 + 7x + 6}$

7. $\frac{n^2 - an + b}{pn + q}$

8. $\frac{n^3 + a^2}{n^3 + b^3}$

9. $\frac{n^2(3n - 2)}{(n - 1)^2(4 - n)}$

10. $\frac{n(n + 3)^2}{(2n - 1)^3}$

11. $\frac{an^m}{(an + b)^{m+1}}$ (n positivo).

12. Siendo:

$$x = \frac{2n + 3}{3n + 1} \quad , \quad y = \frac{n^2 - n + 2}{2n^2 + 3n + 1}$$

halla el límite de cada una de las variables x, y, así como el de su suma y su producto, cuando $n \to \infty$.

10

Continuidad de funciones

78. Límite de una función.—Calculemos los valores de la función $y = x^2 + 3$ para una sucesión de valores de x que tiendan hacia 2, ya creciendo o ya decreciendo.

CRECIENTE		DECRECIENTE	
$x = 1$	$y = 4$	$x = 3$	$y = 12$
$x = 1{,}5$	$y = 5{,}25$	$x = 2{,}5$	$y = 9{,}25$
$x = 1{,}9$	$y = 6{,}61$	$x = 2{,}1$	$y = 7{,}41$
$x = 1{,}99$	$y = 6{,}901$	$x = 2{,}01$	$y = 7{,}0401$
$x = 1{,}999$	$y = 6{,}996001$	$x = 2{,}001$	$y = 7{,}004001$

Se ve que y puede diferir de 7 tan poco como se quiera, tomando x suficientemente próximo a 2. Cualquier otra sucesión de valores de x que tomemos, tendiendo hacia 2, observamos que y tiende hacia 7.

Se dice que el límite de la función $y = x^2 + 3$ es 7, cuando x tiende a 2, y se expresa

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3) = 7$$

Se dice que una función $y = f(x)$ *tiende a un límite* l *al tender* x *hacia* x_1 *cuando para todas las sucesiones de valores de* x *que tienen por límite* x_1, *las sucesiones de los correspondientes valores de* $f(x)$ *tienen siempre como límite* l.

Y se expresa:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = l$$

Este límite, que comprende como caso particular al de las estudiadas en la lección anterior, tiene todas las propiedades de aquéllos, pues se refiere a sucesiones convergentes. La diferencia entre uno y otro caso estriba en que allí había una sucesión única que tendía a un límite, y aquí hay infinitas sucesiones de valores de x que tienden hacia x_1, a las que corresponden otra infinidad de valores de y que tienden todas hacia l.

Hay que observar también que en la definición dada no intervienen más que los valores de $f(x)$ que corresponden a otros de x próximos a x_1, pero no el mismo valor x_1, en el cual la función puede no tener valor alguno o tener un valor cualquiera.

EJEMPLO.—Calculemos el valor de la función $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ para una sucesión de valores de x que tiendan hacia 3 ya creciendo, ya decreciendo.

CRECIENTE		DECRECIENTE	
$x = 0$	$y = 3$	$x = 4$	$y = 7$
$x = 1$	$y = 4$	$x = 3{,}5$	$y = 6{,}5$
$x = 2$	$y = 5$	$x = 3{,}1$	$y = 6{,}1$
$x = 2{,}9$	$y = 5{,}9$	$x = 3{,}001$	$y = 6{,}01$
$x = 2{,}99$	$y = 5{,}99$	$x = 3{,}0001$	$y = 6{,}001$
$x = 2{,}999$	$y = 5{,}999$	$x = 3{,}01$	$y = 6{,}0001$

Ambas sucesiones de valores de y pueden diferir de 6 en tan poco como queramos, tomando x suficientemente próximo a 3. Pero si damos a x el valor 3, resulta $y = \frac{0}{0}$, que es indeterminado, ya que cualquier número multiplicado por el divisor cero nos daría el dividendo cero. Por tanto, en este caso,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

y en cambio $f(3)$ no está definida; o sea, en las sucesiones de valores de x, que tienden a 3, debe excluirse el valor 3. Se observa sin embargo que es fácil hallar el verdadero valor de $f(3)$, bastando para ello simplificar la función así:

$$y = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$$

y dando a x ahora el valor 3, queda $f(3) = 3 + 3 = 6$. Este se llama *verdadero valor* de la función para $x = 3$, y vemos que coincide con el límite. En los números siguientes daremos métodos para determinar algunos límites indeterminados, parecidos al anterior.

79. **Incrementos.**—Cuando una variable cambia de valor, la canti-

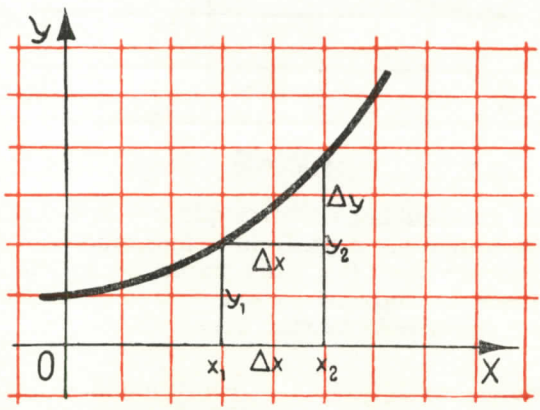


FIG. 36

dad añadida a su valor primero para obtener el segundo se llama *incremento*. Así, si x varía de 4 a 4,5, su incremento es 0,5. Si x varía

de 4 a 3,75, el incremento es $-0{,}25$. De una manera general, si x varía de x_1 a x_2, el incremento es $x_2 - x_1$. Habitualmente se representa el incremento por el símbolo Δ, de modo que:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \text{y} \quad x_2 = x_1 + \Delta x.$$

Si y es función de x, todo incremento dado a x determina un incremento correspondiente de y. Así, si x varía de x_1 a x_2, y variará de y_1 a y_2. De donde (fig. 36):

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

80. **Continuidad de las funciones.**—En la lección 8.ª vimos un método elemental para trazar la gráfica de una función. Dicha función se denomina *continua* cuando su gráfica no presenta saltos, y podemos dibujarla de un modo continuo, sin levantar la pluma del papel.

Para precisar matemáticamente esa idea intuitiva, supongamos un punto dado P (x_1, y_1) de la curva (fig. 37), y un punto variable Q (x, y)

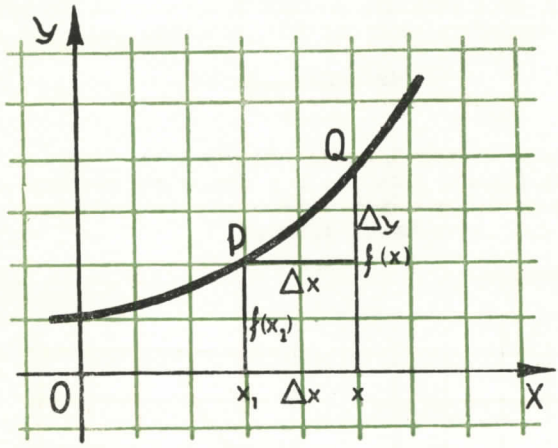


FIG. 37

de la misma. La continuidad significa que $x - x_1 = \Delta x$, e $y - y_1 = \Delta y$ tienden simultáneamente a cero. Definiremos, pues:

Dada una función $y = f(x)$, *y un punto* (x_1, y_1) *de su gráfica, se dice que la función es continua para* $x = x_1$ (*o en el punto* $x = x_1$) *si* $\Delta y \to 0$ *al tender hacia cero* Δx (fig. 37).

81. **Condiciones analíticas de la continuidad.** — Sea una función cualquiera $y = f(x)$ que representamos gráficamente (fig. 37). Si la función es continua en el punto P, ha de verificarse que $\Delta y \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, o sea, cuando Q $\to$ P. Pero según el número 79:

$$\Delta y = f(x) - f(x_1)$$

Luego:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0$$

o sea:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) - f(x_1) = 0 \qquad [1]$$

ya que el límite de una diferencia es igual a la diferencia de los límites (número 16) y el límite de la constante $f(x_1)$ es la misma constante. De la igualdad [1] se deduce que:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1) \qquad [2]$$

Por tanto: *una función* $y = f(x)$ *es continua para el valor* $x = x_1$ *(o en el punto* $x = x_1$*) si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1.ª *Existe* $f(x_1)$, *o sea,* $f(x_1)$ *no es infinita ni indeterminada.*

2.ª *La función tiende a un límite* l *cuando* $x \to x_1$, *o sea:*

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = l$$

3.ª *El límite* l *es igual al valor de la función en el punto* x_1, *esto es.*

$$l = \lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

Dicho más brevemente. *Una función es continua en un punto si el límite de la función coincide con el valor de la función en el límite.*

EJEMPLO 1.º La función $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, según se explicó en el número 78, no es continua en el punto $x = 3$, ya que aunque cumple la condición 2.ª no cumple la primera, esto es, $f(3)$ no está definida. En este caso se dice que el punto $x = 3$ es un *punto de discontinuidad evitable,* ya que la indeterminación puede evitarse simplificando la función, con lo que se reduce a

$$y = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$$

Esta función $y = x + 3$ es continua para $x = 3$.

EJEMPLO 2.º La función $y = x^2 + 3$, estudiada también en el número 60, es continua en el punto $x = 2$, ya que cumple las tres condiciones arriba enunciadas.

82. Función continua en un intervalo.—*Una función se llama continua en un intervalo cuando lo es para todos los valores de* x *del mismo.*

Gráficamente, esto sucede siempre que la curva representativa de la función no presenta saltos ni interrupciones (fig. 38).

Es evidente que una función continua no puede cambiar bruscamente de valor, ya que podemos hacerla variar tan poco como queramos, tomando el incremento de x suficientemente pequeño. Como consecuencia, si una función continua toma un valor A para $x = a$, y un valor B para $x = b$, tomará un valor C comprendido entre A y B, por lo menos para un valor de x comprendido entre a y b.

En particular, si $f(a)$ es positivo y $f(b)$ negativo, será $f(x) = 0$, por lo menos para un valor de x comprendido entre a y b.

Luego: *Si una función continua pasa de un valor A a un valor B, ha de pasar, por lo menos una vez, por todos los valores intermedios entre A y B.*

83. **Funciones discontinuas.**—Una función es discontinua en un punto cuando no cumple alguna de las condiciones de la continuidad en dicho punto; o sea, si Δy no tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$.

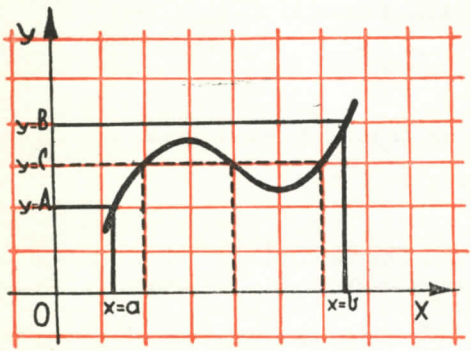


FIG. 38

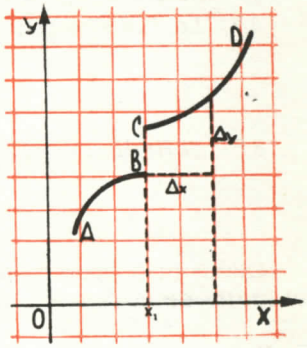


FIG. 39

Gráficamente esto sucede siempre que la curva representativa presenta algún salto o interrupción. En la figura 39, $\Delta y \to BC$ cuando $\Delta x \to 0$ en el punto de abscisa x_1.

EJEMPLO.—Sea la función $y = \dfrac{12}{x}$.

Formaremos el cuadro de valores:

x	-12	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6	12
y	-1	-2	-3	-4	-6	-12	∞	12	6	4	3	2	1

La representación gráfica es una *hipérbola equilátera* cuyo eje real es la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Los ejes de coordenadas X'X e Y'Y se aproximan indefinidamente a las ramas de la hipérbola. Rectas tales se denominan *asíntotas de la curva* (fig. 40).

Para $x = 0$ la función *no está definida*. No hay punto en la gráfica para dicho valor. Al pasar por $x = 0$ la función da un salto desde $-\infty$ a $+\infty$. Luego en $x = 0$ hay un punto de discontinuidad de la función.

Es fácil ver que en este caso no se cumplen ni la 1.ª ni la 2.ª de las condiciones impuestas en el número 81 para la continuidad. Para va-

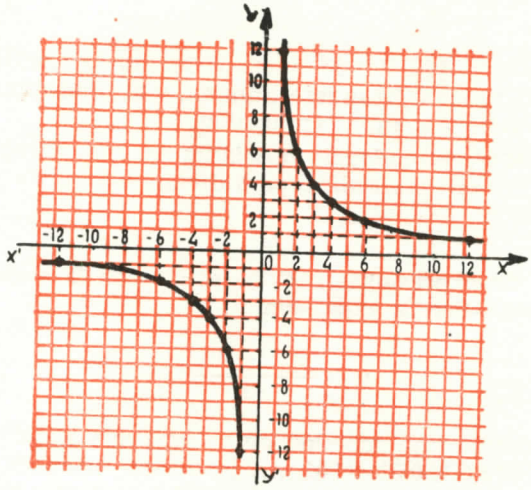


Fig. 40

lores de x que tienden hacia cero creciendo, por ejemplo -1, $-0{,}1$, $-0{,}01$, ..., $f(x) \to -\infty$; y para valores de x que tienden hacia cero decreciendo, por ejemplo, 1, 0,1, 0,01, ..., $f(x) \to +\infty$. Luego $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

84. Determinación de límites de funciones en que entran radicales. Ejemplo: *Sea hallar*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} \qquad [3]$$

Para $x = 0$ esta fracción toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Demos a x los valores sucesivos 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...; la frac-

ción toma entonces los valores 1,0487; 1,9450; 1,999; ...; lo que sugiere el límite 2.

En efecto, multipliquemos los dos términos de la fracción [3] por $1+\sqrt{1-x}$; resulta:

$$\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})}=\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)}=1+\sqrt{1-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\ (1+\sqrt{1-x})=1+1=2$$

Luego la fracción [3] tiende hacia 2 cuando x tiende hacia cero. Para $x=0$ dicha función es indeterminada, y el procedimiento seguido indica cómo se evita esa indeterminación.

Los límites indeterminados de funciones en que entren radicales de índice 2 se determinan multiplicando y dividiendo por la expresión radical conjugada.

85. **Límites de expresiones racionales cuando la variable tiende a un número finito.**—Sea la expresión

$$y=\frac{2x^2+3x}{5x}$$

donde x va tomando una sucesión de valores que tienden a cero, por ejemplo los valores 0,1, 0,01, 0,001, ...; y tomará entonces otra sucesión de valores cuyo límite se trata de determinar; o sea hay que hallar

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{2x^2+3x}{5x} \qquad [4]$$

Sustituyendo en la función x por 0, da $\frac{0}{0}$, expresión indeterminada, ya que cualquier número multiplicado por 0 da 0.

Pero dividiendo numerador y denominador por x, queda:

$$\frac{2x+3}{5}$$

que para $x=0$ vale:

$$\frac{0+3}{5}=\frac{3}{5}$$

Los límites indeterminados de expresiones racionales, cuando $x \to 0$ *se determinan dividiendo numerador y denominador por la potencia más baja de* x *que exista en cualquiera de ellos.*

Sea ahora hallar

$$\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2}$$

Sustituyendo $x = a$, resulta $\frac{0}{0}$. Para evitar esa indeterminación, descompongamos en factores el numerador y denominador, y luego de simplificar hagamos la sustitución indicada:

$$\frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2} = \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x^2 - a^2} = x^2 + a^2 \qquad [5]$$

Luego tomando límites en el primero y último miembro de esta igualdad resulta:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a} (x^2 + a^2) = 2a^2.$$

Los límites indeterminados de funciones racionales, cuando x *tiende a un número finito distinto de cero, se determinan descomponiendo en factores numerador y denominador y simplificando. A veces basta dividir el primero por el segundo.*

Como, por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x - 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 5) = 13.$$

86. **Sucesión comprendida entre otras dos.**—*Si las sucesiones* u_n *y* v_n *tienen el mismo límite* l *y, además,* $u_n < w_n < v_n$ *para todo valor de* n, *entonces* w_n *tendrá el mismo límite* l.

En efecto, de las desigualdades del enunciado resultan éstas:

$$u_n - l < w_n - l < v_n - l; \qquad [6]$$

y ya que los términos extremos de esta limitación son infinitésimos, también lo será el del centro. Luego el límite de w_n es l.

Llamaremos **infinitésimos** a las sucesiones nulas, o sea, a las que tienen por límite cero.

87. **Aplicación al cálculo del límite de la razón del seno o la tangente al ángulo, cuando éste tiende a cero.**—Sea x la medida del ángulo expresada en radianes (figura 41). Tracemos una circunferencia de radio $OA = r$.

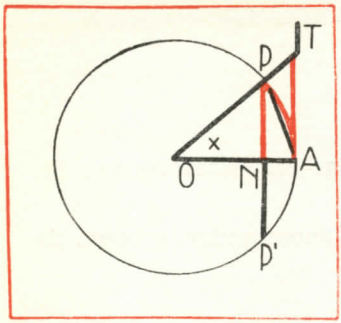


FIG. 41

Se tendrá:

$$\operatorname{sen} x = \frac{PN}{r} \quad ; \quad PN = r \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{AT}{OA} \quad ; \quad AT = r \operatorname{tg} x$$

Además evidentemente: área $\Delta AOP <$ $<$ área sector $AOP <$ área ΔAOT, por ser siempre una parte menor que el todo. Pero

$$\text{área } \Delta AOP = \frac{1}{2} OA \cdot PN = \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x$$

$$\text{área sector } OAP = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AP} \cdot r = \frac{1}{2} rx \cdot r = \frac{1}{2} r^2 x$$

$$\text{área } \Delta AOT = \frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$$

Sustituyendo estos valores:

$$\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$$

y simplificando:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \qquad [7]$$

Dividiendo los términos de la igualdad $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$ por los de la limitación anterior, queda:

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Cuando $x \to 0$, $\cos x \to 1$; luego $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, que está comprendida entre dos cantidades cuyo límite es 1, tendrá el mismo límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Análogamente, dividiendo la igualdad $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$ por la limitación [7]:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1$$

de donde se deduce que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

88. **Comparación de infinitésimos por cociente.**—Por definición, *dos infinitésimos* α *y* β, *son del mismo orden, si la razón entre ambos tiende hacia una cantidad* K *finita y diferente de cero,*

$$\frac{\alpha}{\beta} = K \qquad [8]$$

Si en la razón anterior, $K = O$, se dice que α es de *orden superior a* β; si $K = \infty$, α es de *orden inferior*. Si no existe límite alguno para la razón $\frac{\alpha}{\beta}$, se dice que *los dos infinitésimos no son comparables.*

89. **Orden de un infinitésimo.**—*Un infinitésimo* α *es de orden* m *respecto al infinitésimo* β, *si la razón* $\frac{\alpha}{\beta^m}$ *tiende a una cantidad* K *finita y no nula.*

El infinitésimo β que ha servido de término de comparación, recibe el nombre de *infinitésimo principal.*

Por definición, antes del límite, se tendrá:

$$\frac{\alpha}{\beta^m} = K + \epsilon, \quad \text{o sea,} \quad \alpha = \beta^m (K + \epsilon) = K\beta^m + \epsilon\beta^m \qquad [9]$$

Se llama *forma normal* del infinitésimo α, la dada por la expresión $\alpha = \beta^m (K + \epsilon)$.

Recibe el nombre de *parte principal* del infinitésimo α, la cantidad $K\beta^m$, que es la parte más importante de todo infinitésimo; al término $\epsilon\beta^m$ se llama *parte complementaria.*

90. Investigación del orden y de la parte principal de un infinitésimo.—Sea el infinitésimo $y = F(x)$ cuando x tiende a cero. Se forma la razón $\frac{y}{x^m}$ y se determina el exponente m de tal modo que la razón última tienda a una cantidad K finita y no nula. El orden es entonces m y la parte principal Kx^m.

91. Infinitésimos equivalentes.—Dos infinitésimos son *equivalentes* si el límite de su cociente es la unidad.

EJEMPLO.—Son infinitésimos equivalentes las variables x, sen x, tg x cuando $x \to 0$.

Según la definición, dos infinitésimos equivalentes son del mismo orden, ya que su razón permanece finita y distinta de cero.

EJEMPLO.—*Determinar el orden y parte principal, cuando* x *tiende a cero, de* $1 - \cos x$.

Solución:

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{4} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1$$

Por tanto, $1 - \cos x$ es infinitésimo de orden 2 cuando $x \to 0$, y su parte principal es $\frac{1}{2} x^2$.

92. Teorema.—*Si en una expresión figura como factor o divisor un infinitésimo* α, *el límite de dicha expresión no se altera si se sustituye* α *por otro infinitésimo* β *equivalente al primero; y tampoco se altera si se sustituye uno o varios factores o divisores por sus respectivos límites finitos y distintos de cero.*

En efecto; si la expresión dada es $A\alpha\mu$, siendo α un infinitésimo equivalente a β, y $\lim. \mu = \lambda \neq 0$, por ser

$$\lim. \frac{\alpha}{\beta} = 1 = \lim. \frac{\beta}{\alpha}; \quad \text{y} \quad \lim. \frac{\lambda}{\mu} = 1$$

se tiene:

$$\lim. A\alpha\mu = \lim. A\alpha\mu \cdot \lim. \frac{\beta}{\alpha} \cdot \lim. \frac{\lambda}{\mu} = \lim. A\alpha\mu \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda}{\mu} = \lim. A\beta\lambda.$$

y análogamente se demuestra si en lugar de tratarse de factores se tratara de divisores.

He aquí algunos infinitésimos equivalentes:

Infinitésimos para $x \to 0$	*Sus equivalentes*	*Infinitésimos para* $x \to 0$	*Sus equivalentes*
$(1+x)^m - 1$	mx	arc sen Kx	Kx
sen x	x	arc tg x	x
sen Kx	Kx	arc tg Kx	Kx
tg x	x		$\frac{x^2}{2}$
tg Kx	Kx	$1 - \cos x$	
arc sen x	x		

EJEMPLOS:

1.º $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{x} = 5$

2.º $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{tg } 7x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{7x} = \dfrac{4}{7}$

3.º $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x^\circ}{x^\circ} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\text{sen } y}{\frac{180}{\pi} y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\frac{180}{\pi} y} = \dfrac{\pi}{180}$

siendo y el ángulo x° expresado en radianes.

4.º $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos nx}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \text{ sen}^2 \frac{nx}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\left(\frac{nx}{2}\right)^2}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2n^2x^2}{4x^2} = \frac{n^2}{2}$$

EJERCICIOS

1. Demuestra que en la ecuación $y = x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$, cuando x tiende a cero, los infinitésimos y, x no son comparables.
2. Demuestra que son infinitésimos equivalentes

$$1 - \cos x \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{2}$$

3. Calcula $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\dfrac{8}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2}}$; $\lim_{x \to 0} (e^{x/a} + e^{-x/a}) \cdot \dfrac{a}{2}$

4. $\lim_{x \to 0} \log. \cos x$; $\lim_{x \to 0} \log. \dfrac{x^3 + 1}{x + 2}$; $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + \cos x}$

5. $\lim_{\alpha \to 0} \dfrac{\text{arc sen } \alpha}{\alpha}$; $\lim_{\alpha \to 0} \dfrac{\text{arc tg } \alpha}{\alpha}$; $\lim_{\alpha \to 0} \dfrac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2}$

Calcula los límites de las funciones siguientes:

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x}$

7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } \dfrac{p}{q} x}{x}$

9. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\text{sen } px}{\text{sen } qx}$

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } mx}{x}$

11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } mx}{\text{tg } nx}$

12. $\lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{4n - 2}{2n + 3} \right)$

13. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1 - x^3}}{\sqrt{1 - x^2}}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{x + 1}}{x}$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x}$

16. $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n})$

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x - 5}{x^2 + 2x - 7}$

18. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 5x - 7}{6x^3 + 3x^2 + 8}$

19. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

20. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 9}{x^2 - 3x}$

21. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^3 + 5x - 7}{7x^2 - x - 6}$

22. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 10x + 4}{x^3 - 2x^2}$

23. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$

24. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{3n^2+1}$

25. ¿Tienen algún punto de discontinuidad las siguientes funciones?:

$$\frac{x^3}{2x-3} \; ; \quad \frac{x}{(x+1)^2} \; ; \quad \operatorname{ctg} x \; ; \quad \sec x \; ; \quad \operatorname{cosec} 2x \; ;$$

$$\frac{1}{x^4 - 13x^2 + 36} \; ; \quad \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \; ; \quad \operatorname{tg} 3x \; ; \quad \frac{1+\cos x}{2+\operatorname{sen} x}$$

11

Derivada de una función

93. El problema de la tangente.—Consiste en hallar la ecuación de la tangente a una curva cualquiera en uno de sus puntos. En la Geometría elemental no hay solución general para este problema. Para cada curva hay que descubrir una propiedad que determine la tangente. Ya antes de N. Sr. Jesucristo los griegos hallaron métodos particulares para construir las tangentes a las curvas usuales: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Pero no pudieron pasar de ahí.

El *cálculo diferencial fue concebido* para resolver este problema, como vamos a ver en seguida.

Comencemos dando una definición rigurosa de tangente.

94. Tangente a una curva.—En la figura 42 supongamos sobre una curva un punto B, que se aproxima de un modo continuo hacia otro punto A de la misma curva, tomando diversas posiciones B, B′, B″, etc. Las secantes BA, B′A, ..., girarán alrededor de A, y podemos considerar la tangente en A como la *posición límite de la secante* BA *cuando* B *tiende a coincidir con* A.

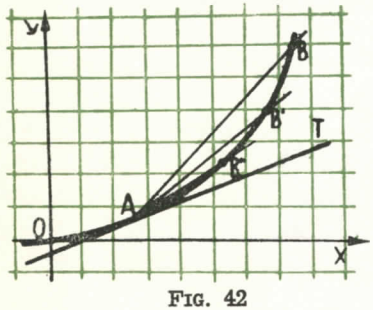


FIG. 42

Tangente a una curva en un punto A *es la posición límite de la secante* AB *cuando* B *tiende a confundirse con* A.

95. Pendiente de la tangente.—En la figura 43, sea P el punto (x, y) y Q un punto próximo $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, situados ambos en la curva dada, de modo que:

$$MN = PR = \Delta x$$

$$RQ = NQ - MP = \Delta y$$

Designando por m_1 la pendiente de la secante PQ y por m la pendiente de la tangente en P, se tiene:

$$m_1 = \text{tg } QPR = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad [1]$$

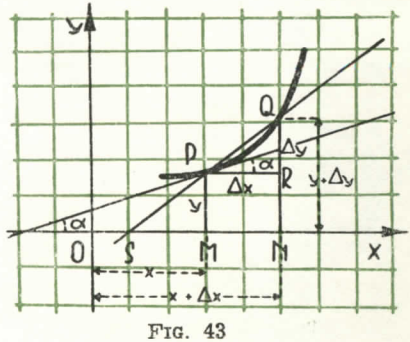


FIG. 43

Ya que la tangente en P es el límite de la cuerda PQ cuando Q tiende a P, se verificará igualmente que la pendiente de la tangente será el límite de la pendiente de la cuerda cuando Q→P, o lo que es lo mismo, cuando $\Delta x \to 0$. O sea:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad [2]$$

A este límite del cociente de incrementos se denomina *derivada* de y respecto a x.

96. **Derivada de una función de una variable.**—La definición fundamental del cálculo diferencial es la siguiente:

Derivada de una función $y = f(x)$ *en un punto es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable cuando este último tiende a cero.*

La derivada de la función $y = f(x)$ se representa por los símbolos $\frac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$, que se leen: derivada de y [o $f(x)$] con respecto a x. De modo que, por definición, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = y' = f'(x)$$

Luego, *si* $y = f(x)$ *es la ecuación de una curva, la pendiente de ésta en uno de sus puntos* (x, y) *es igual a la derivada de la función en dicho punto.*

Este resultado es de gran importancia, y es la base de las aplicaciones del cálculo diferencial al estudio de las curvas.

Normalmente el valor de la derivada varía con el punto considerado. O sea, la derivada es una función de x, a la que se denomina *función derivada.*

97. **Funciones derivables.**—De la definición de derivada y de la teoría de los límites se deduce que, para que exista la derivada de una función para un cierto valor de la variable independiente, *necesariamente* la función debe ser continua para este valor de la variable. O sea, la derivada no existirá en los puntos en que Δy no tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$, esto es, en los puntos en que la función es discontinua. De ahí la importancia del estudio hecho sobre la continuidad.

Ya que la continuidad es *condición necesaria* para la derivación, se impone demostrar la continuidad de las funciones elementales que hemos de estudiar en adelante.

98. **Continuidad de las funciones elementales.**—Como consecuencia de la definición de continuidad y de los teoremas relativos a límites, se deduce que:

I. *La suma, la diferencia, el producto y el cociente de funciones continuas en un intervalo, es una función continua en el mismo intervalo, excepto en el caso en que el divisor se anule en algún punto de dicho intervalo.*

En efecto: si $g(x)$ y $k(x)$ son continuas en un intervalo, en todo punto α del mismo se verificará que, según se demostró en el núm. 16:

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = g(\alpha) \quad , \quad \lim_{x\to\alpha} k(x) = k(\alpha)$$

Si es $f(x) = g(x) + k(x)$:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) + \lim_{x\to\alpha} k(x) = g(\alpha) + k(\alpha) = f(\alpha).$$

Si es $f(x) = g(x) \cdot k(x)$:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} k(x) = g(\alpha) \cdot k(\alpha) = f(\alpha).$$

Para la diferencia y cociente basta poner los signos — y : en vez de + y ×.

De aquí resulta que, como la función $y = x$ es continua (representa una recta), también lo es la $x^2 = x \cdot x$, la $x^3 = x^2 \cdot x$, ..., la x^n, y lo mismo sucede con cualquier polinomio y con cualquier función racional, excepto a lo sumo en los puntos que anulan al denominador.

II. *La función exponencial es continua para todos los valores de* x.

Sea x_0 un número cualquier; se tiene, llamando $\Delta x_0 = h$.

$$\Delta y = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1);$$

a^h tiene por límite uno para $h \to 0$, luego el paréntesis tiene por límite cero. Por tanto, ambos miembros tienden a cero cuando $h \to 0$ y la función es continua.

III. *Si una función es continua, también lo es su función inversa.*

En efecto, los incrementos de la x y de la y tienden simultáneamente a cero, por ser continua la función primera; luego la segunda también lo es.

IV. *La función logarítmica que es inversa de la exponencial, es también función continua.*

V. *La función* $y = sen\ x$, *es continua para todo valor* a *de* x.

Pues

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \cos x \cdot \operatorname{sen} 0 = 2 \cos x \cdot 0 = 0$$

La continuidad de la función $y = \cos x$ se deduce de que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; luego $\cos x$ será continua como $\operatorname{sen} x$.

Como $y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, por ser cociente de dos funciones continuas será continua, excepto en los puntos

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

en que $\cos x = 0$.

Análogamente $y = \operatorname{cotg} x$ es continua, excepto en los puntos $x = k\pi$.

99. **Regla general para derivar.**—De la definición de derivada se deduce que el procedimiento para derivar una función $y = f(x)$ requiere los siguientes pasos:

Paso primero: En la función se reemplaza x por $x + \Delta x$ y se calcula el nuevo valor de la función $y + \Delta y$.

Paso segundo: Se resta el valor de la función del nuevo valor, y así se tiene Δy (incremento de la función).

Paso tercero: Se divide el incremento Δy de la función por el incremento Δx de la variable independiente.

Paso cuarto: Se halla el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero.

Debemos insistir en que la variable, en este paso cuarto, es Δx y no x. El valor de ésta permanece fijo, constante, desde el principio de la derivación.

Debe el alumno aplicar esta regla a muchos ejemplos. Aquí detallaremos dos:

EJEMPLO 1.º *Sea derivar la función:*

$$y = 3x^2 + 5$$

Paso primero:

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$$

$$= 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$$

Paso segundo: Restando:

$$\begin{array}{rl} y + \Delta y = 3x^2 + 6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \\ y = 3x^2 \qquad\qquad\qquad\quad + 5 \\ \hline \Delta y = \qquad 6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{array}$$

queda:

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta y} = 6x + 3\Delta x$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 6x$$

EJEMPLO 2.º *Sea derivar la función:*

$$y = \frac{c}{x^2} \qquad [3]$$

Paso primero:

$$y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} \qquad [4]$$

Paso segundo:

Restando [3] de [4]:

$$\Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{-c\cdot\Delta x(2x + \Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2}$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c\cdot\frac{2x + \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = -c\cdot\frac{2x}{x^2(x)^2} = -\frac{2c}{x^3}$$

EJERCICIOS

Emplea la regla general para derivar cada una de las siguientes funciones:

1. $y = 4x^2$
2. $y = 3 - x^2$
3. $y = x^3 - 3x$
4. $y = mx + b$
5. $y = \dfrac{2}{x^2}$
6. $y = \dfrac{1}{2x + 1}$
7. $y = \dfrac{1}{1 - x}$

8. Averigua para qué valores de x está definida la función:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x - 6}$$

9. Halla la función inversa de $y = \dfrac{3x}{x-2}$

10. Halla la función inversa de $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

11. Halla la función inversa de $y = 2^x$.
Halla por derivación la pendiente e inclinación de la tangente a las curvas siguientes en el punto indicado, y la ecuación de dicha tangente:

12. $y = 4 - x^2$, para $x = 2$.

13. $y = 4x - x^2$, para $x = 2$.

14. $y = \dfrac{9}{x}$, para $x = 3$.

15. $y = x^2 - \dfrac{x}{2}$, para $x = 0$.

16. $y = x^3 - 3$, para $x = 1$.

17. $y = 2x - x^3$, para $x = -1$.

18. Demuestra que las siguientes funciones son continuas en todos sus puntos:

a) $2 + x - x^3$; *b)* $\dfrac{1}{1 + x^2}$; *c)* $\operatorname{sen}^2 x$; *d)* $\dfrac{x}{x^2 + 1}$;

e) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{4 + \cos x}$; *f)* $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$ [m y n enteros positivos].

19. ¿Dónde son discontinuas las funciones?

$$a)\ y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad b)\ y = \frac{x^3 + 27}{x + 3}$$

¿Qué valor hay que atribuirles en los puntos de discontinuidad para evitar dicha discontinuidad?

12

Derivación de las funciones algebraicas

100. **Derivada de una constante.**—Una función que adquiere el mismo valor para todos los valores de la variable independiente es *constante,* y la representamos por:

$$y = c$$

Cuando x toma un incremento Δx, la función no cambia de valor, esto es, $\Delta y = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Tomando límites en los dos miembros de la igualdad última:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 0$$

I. $$\frac{dc}{dx} = 0$$

La derivada de una constante es nula.

Este resultado fácilmente podía preverse. Porque la gráfica de $y = c$ es una recta paralela al eje OX, y su pendiente es, por consiguiente, nula. Pero esta pendiente es el valor de la derivada.

101. **Derivada de una variable con respecto a sí misma.**—Sea:

$$y = x \qquad [1]$$

Siguiendo la regla general, tenemos:

Paso primero:

$$y + \Delta y = x + \Delta x \qquad [2]$$

Paso segundo: Restando [1] de [2]:

$$\Delta y = \Delta x$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$y' = 1$$

II. $$\therefore \frac{d}{dx} x = 1$$

La derivada de una variable respecto a sí misma es igual a la unidad.

102. **Derivada de una suma algebraica de funciones de una misma variable.—Sea**

$$y = u + v - w \qquad [3]$$

donde u, v y w son funciones de x.

Por la regla general:

Paso primero: Incrementando x, quedan incrementados u, v y w, y por tanto y. Luego,

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w \qquad [4]$$

Paso segundo: Restando [3] de [4]:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

o sea,

$$y' = u' + v' - w'$$

III. $$\therefore \frac{d}{dx}(u + v - w) = u' + v' - w'$$

La derivada de una suma algebraica de n *funciones de una misma variable, es igual a la suma algebraica de sus derivadas, siendo* n *un número fijo.*

103. Derivada del producto de dos funciones de una misma variable.—Sea:

$$y = uv \qquad [5]$$

donde u y v son funciones de x.

Por la regla general:

Paso primero: Incrementando x, quedan incrementados u y v, y por tanto y. Luego,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v)$$

Efectuando:

$$y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v \qquad [6]$$

Paso segundo: Restando [5] de [6]:

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} +$$

$$+ v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, por ser u función continua de x, y, por tanto, el límite del producto $\Delta u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ es cero, tenemos:

$$y' = uv' + vu'$$

IV. $$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

La derivada del producto de dos funciones de una misma variable es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

104. Derivada del producto de una constante y una función.—Sea:

$$y = cv$$

Si aplicamos la fórmula IV a este producto, resulta:

$$\frac{d}{dx}(cv) = cv' + v.0$$

porque la derivada de la constante c es cero. Luego,

V. $$\frac{d}{dx}(cv) = cv'$$

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

105. Derivada de un producto de n funciones, siendo n un número fijo.—Sea el producto de tres funciones de x:

$$y = uvw$$

que escribiremos:

$$y = (uv)\, w$$

y consideremos (uv) como una función de la variable x; aplicando la fórmula IV, se tendrá:

$$y' = (uv)'\, w + (uv)\, w';$$

y sustituyendo $(uv)'$ por su valor $u'v + v'u$, resulta:

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Generalizando la última igualdad, se tendrá, siendo $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n funciones de x:

VI. $$\frac{d}{dx}(u_1 u_2 \ldots u_n) = u'_1 u_2 u_3 \ldots u_n + u_1 u'_2 u_3 \ldots u_n + u_1 u_2 u'_3 \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 u_3 \ldots u'_n$$

Es decir:

La derivada del producto de n *funciones de una misma variable es igual a la suma de* n *términos, que se obtienen multiplicando la derivada de cada una de las funciones por todas las demás.*

106. Derivada de la potencia de una función con exponente entero y positivo: regla de la potencia.—Si los n factores del producto anterior son iguales a u, tendremos:

$$\frac{d}{dx} u^n = u^{n-1} u' + u^{n-1} u' + u^{n-1} u' + \ \ldots + u^{n-1} u' = n\, u^{n-1} u'$$

De donde:

VII. $$\frac{d}{dx} u^n = n\, u^{n-1} u'$$

La derivada de la potencia de una función con exponente entero y positivo es igual al producto del exponente por la función con exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función.

Esta regla se llama *Regla de la Potencia.* Más adelante demostraremos que es válida para cualquier exponente *constante.*

107. Derivada de un cociente.—Sea:

$$y = \frac{u}{v}$$

De donde, quitando denominadores:

$$u = y \cdot v$$

Derivando ésta por la *regla del producto,* se tiene:

$$u' = y'v + yv'$$

Despejando:

$$y'v = u' - yv' = u' - \frac{u}{v} v' = \frac{u'v - uv'}{v}$$

o sea,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2};$$

o en otra forma:

VIII. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

La derivada de un cociente de dos funciones de una misma variable es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, dividido todo por el cuadrado del denominador.

Si el denominador es constante, por ejemplo, $v = c$, de la fórmula VIII, resulta:

IX. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{u'}{c}$$

La derivada del cociente de una función por una constante es igual a la derivada de la función dividida por la constante.

EJEMPLOS.—*Derivar las siguientes funciones:*

1.º $y = x^3$

Solución:

$$y' = 3x^2$$

2.º $y = ax^4 - bx^2$

Solución:

$$y' = \frac{d}{dx}(ax^4) - \frac{d}{dx}(bx^2) = a\frac{d}{dx}(x^4) - b\frac{d}{dx}(x^2) = 4ax^3 - 2bx$$

3.º $y = \dfrac{7x^3 + 5}{2x - 10}$

Solución:

$$y' = \frac{(7x^3 + 5)' \cdot (2x - 10) - (2x - 10)' \cdot (7x^3 + 5)}{(2x - 10)^2} =$$

$$= \frac{14x(2x - 10) - 2(7x^3 + 5)}{(2x - 10)^2} = \frac{14x^3 - 140x - 10}{(2x - 10)^2}$$

4.º $y = \dfrac{(x^2 + 7) \cdot (2x^3 + 3)}{9}$

Solución:

$$y' = \frac{(x^2 + 7)'(2x^3 + 3) + (x^2 + 7)(2x^3 + 3)'}{9} =$$

$$= \frac{2x \cdot (2x^3 + 3) + (x^2 + 7) \cdot 4x}{9} = \frac{8x^3 + 34x}{9}$$

5.º $y = (x^3 - 3)^4$

Solución:

$$y' = 5(x^2 - 3)^4 \frac{d}{dx}(x^2 - 3) = 5(x^2 - 3)^4 \cdot 2x = 10x \cdot (x^2 - 3)^4$$

108. **Derivada de una función de función.**—Sea y una función continua de u, y ésta a su vez función de x. Se dice entonces que y es *función de función de* x. Evidentemente los valores de x han de ser tales que los correspondientes de u deben pertenecer al campo de variabilidad de y.

Cuando x experimenta un incremento Δx, u experimentará un incremento Δu, y este cambio en el valor de u producirá en y un incremento Δy. Es evidente la identidad:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta u \to 0$, ya que u es función continua de x. Luego tomando límites en los dos miembros:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

o sea,

X. $$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

La derivada de la función de función respecto de x *es igual al producto de la derivada de* y *respecto a* u *por la de* u *respecto a* x.

EJEMPLO.—*Sea:*

$$y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^3$$

Hagamos:

$$u = \frac{1+x}{1-x}$$

Luego:

$$y = u^3$$

Aplicando la fórmula X, resulta:

$$y'_x = 3u^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = 3 \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{6(1+x)^2}{(1-x)^4}$$

109. Derivación de las funciones inversas.—Si Δx y Δy son los incrementos correspondientes de x e y, entonces, evidentemente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

y, por tanto, cuando $\Delta x \to 0$, se tendrá:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

Luego:

XI. $$y'_x \cdot x'_y = 1$$

Es decir: *Las derivadas de dos funciones inversas son recíprocas.*

EJEMPLO.—Si $y = \sqrt[5]{x}$, será

$$x = y^5 \;\therefore\; x'_y = 5y^4 = 5x^{4/5} \;\therefore\; y'_x = \frac{1}{5x^{4/5}}$$

En este caso, la derivada de una raíz se ha deducido de la correspondiente potencia.

110. Derivada de la raíz.—Sea derivar la función:

$$y = \sqrt[n]{u}$$

siendo u función de x.

Será:

$$u = y^n \quad ; \quad u'_x = ny^{n-1}\,y'_x = n\,(\sqrt[n]{u})^{n-1}\cdot y'_x = \\ = n\sqrt[n]{u^{n-1}}\cdot y'_x$$

Luego:

$$y' = \frac{u'_x}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

XII. $$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{u} = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Si fuera $y = \sqrt{u}$, resultaría:

XIII. $$\therefore \frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual a la derivada de la función partida por el doble de la raíz.

EJEMPLO.—*Derivar:*

$$y = \sqrt{5x^3 - 3x + 4}$$

Aplicando la regla, se tiene:

$$y' = \frac{15x^2 - 3}{2\sqrt{5x^3 - 3x + 4}}$$

111. Derivación de funciones implícitas.—En el caso de las funciones implícitas, frecuentemente es difícil o imposible hallar y en función de x, y luego derivar para obtener y' en función de x sola-

mente. Pero el valor de y' en función de x e y, puede obtenerse derivando con respecto a x cada término de la ecuación en x e y.

Los términos que más frecuentemente se presentan en la práctica, cuando y viene dado implícitamente como función de x, son del tipo $ax^m y^n$ cuya derivada es:

$$\textbf{XIV.} \qquad \frac{d}{dx}(ax^m y^n) = a(x^m n y^{n-1} y' + y^n m x^{m-1})$$

según la regla obtenida para derivar un producto.

EJEMPLO 1.º *Sea la función implícita:*

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Derivando:

$$2x + 2yy' = 0$$

Luego:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Comprobar este resultado despejando la variable y en la función, y derivando.

EJEMPLO 2.º *Sea la función:*

$$x^3 + 3axy + y^3 = a^3$$

Derivando:

$$3x^2 + 3a(xy' + y) + 3y^2 y' = 0$$

De donde:

$$axy' + y^2 y' = -ay - x^2$$

$$y' = -\frac{ay + x^2}{ax + y^2}$$

EJEMPLO 3.º *Sea la función:*

$$y = \sqrt[n]{a^n - x^n}$$

que podemos escribir:

$$y^n = a^n - x^n$$

luego derivando:

$$ny^{n-1} y' = -nx^{n-1}$$

de donde:

$$y' = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$$

112. **Derivadas sucesivas de una función.**—Hemos visto que la derivada de una función de x es, en general, también función de x. Esta nueva función puede ser también derivable, en cuyo caso la derivada

de la *derivada primera* se llama *derivada segunda* de la función original. Análogamente, la derivada de la derivada segunda se llama *derivada tercera,* y así sucesivamente. Por ejemplo, las derivadas sucesivas de

$$y = 7/x = 7 \cdot x^{-1}$$

son:

$$\begin{aligned} y' &= -7x^{-2} = -7/x^2 \\ y'' &= 14x^{-3} = 14/x^3 \\ y''' &= -42x^{-4} = -42/x^4 \\ y^{IV} &= 168x^{-5} = 168/x^5 \\ y^{V} &= -840x^{-6} = -840/x^6 \\ y^{VI} &= 5040x^{-7} = 5040/x^7 \end{aligned}$$

etcétera.

EJERCICIOS

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = 2x + 3x^2$
2. $y = x^4 + 2x^3 + 30$
3. $y = x^6 - 6x^4$
4. $y = 4x^{-1} - 7x^{-2}$
5. $y = 6x^{1/3} - 9x^{2/3}$
6. $y = x^{2/3} - a^{2/3}$
7. $y = (x^2 - 4)(x^4 + 3)$
8. $y = x^n(1 + \sqrt{x})$
9. $y = x(x^2 - 1)(x^2 + 4)$
10. $y = \sqrt{x}(x - 1)(x - 2)$
11. $y = (a - bx + cx^2)^2$
12. $y = (a - bx + cx^2)^n$
13. $x^3y^2 = a^5$
14. $x^ny^n = a^n$
15. $y = \dfrac{3x + 4}{5x - 3}$
16. $y = \dfrac{1 - 2x}{2 - x}$
17. $y = \dfrac{x^4 + 4}{x^2 - 4}$
18. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$
19. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - x}$
20. $y = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}$
21. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$
22. $y = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x(x - 1)}$
23. $y = \sqrt{2x} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$
24. $y = x^2\sqrt{7 - 2x}$
25. $y = (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x}$

26. $y = \dfrac{\sqrt{2+6x}}{x}$

27. $y = (x-1)(\sqrt[3]{x+1}$

28. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

29. $y = x^3 - 2\sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

30. $y = \dfrac{2-3x^3}{1+2x}$

31. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a-bx^2}}$

32. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

33. $y = \sqrt[3]{3x^2-10}$

34. $y = x\sqrt[3]{7-6x^3}$

35. $y = \sqrt{\dfrac{3x+2}{3x-2}}$

36. $y + \sqrt[3]{1+2x}\sqrt{1+3x}$

En cada uno de los siguientes ejercicios halla el valor de y' para el valor dado de x:

37. $y = \dfrac{x+4}{4-x}$; $x = 2$

38. $y = \sqrt[3]{13-5x}$; $x = 1$

39. $y = x\sqrt{6+5x}$; $x = 2$

40. $y = \dfrac{\sqrt{x+9}}{x}$; $x = 4$

41. $y = \sqrt{x(4-x^2)}$; $x = 1$

42. $y = \sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$; $x = 2$

43. Halla la pendiente de cada una de las siguientes curvas en el punto dado:

a) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$; $(2, -1)$

b) $x^2y + x^3 + y^3 + 1 = 0$; $(1, -1)$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$; $(4, 9)$

44. Halla la segunda derivada de las funciones siguientes:

a) $y = x(x-1)^3$

b) $y = x(x^2-1)^2$

c) $y = \sqrt{2ax - x^2}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $y = \dfrac{(1-x)^2}{x}$

45. Dada la función $x = y\sqrt{1-y^2}$ halla $\dfrac{dy}{dx}$.

46. Halla la pendiente de la curva $x = y^2 - 4y$, en los puntos en que corta al eje OY.

47. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^3 - 3x + 5$, siendo $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$, en donde t es el tiempo. ¿Con qué velocidad varía y cuando $t = 4$?

48. Un punto se mueve en el plano según la ley $x = t^2 + 2t$, $y = 2t^3 - 6t$. Halla $\frac{dy}{dx}$ cuando $t = 0;\ 2;\ 5$.

49. Si $y = x^3 - 4x$, y $x = \sqrt{2t^3 + 1}$, halla $\frac{dy}{dt}$ cuando $t = \sqrt{2}$.

50. Halla y' en la función $4x^2 + 9y^2 = 36$.

51. Halla y' en la función $x^2y - xy^2 + x^3 + y^3 = 0$.

52. Halla y' e y'' en las funciones:

a) $x^2 - xy + y^2 = 3$.

b) $x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - 8xy + 6x = 3 \quad ; \quad y = 2$.

c) $x^2y + xy^2 = 2 \quad ; \quad x = 1$.

13

Aplicaciones geométricas de la derivada

113. Pendiente y dirección de una curva en uno de sus puntos.— Según el número 96, *la pendiente* de una curva en uno de sus puntos es igual a la derivada particularizada para dicho punto:

$$m = y'_1 = f'(x_1) \qquad [1]$$

La dirección de una curva en un punto se define como la dirección de la tangente a la curva en ese punto. La inclinación de la tangente se halla fácilmente por la fórmula:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = y'_1 \quad ; \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\, y'_1 \qquad [2]$$

EJEMPLO 1.º *Hallar la pendiente y la dirección de la curva* $y = 2x^2 - 1{,}5$ *en el punto de la abscisa* $x = 3{,}2$. *¿Cuál es la ecuación de la curva derivada?*

La pendiente de la curva en uno de sus puntos es la de su tangente en dicho punto, y por tanto, coincide con la derivada de la función en el mismo; luego

$y' = 4x$, que para el punto dado vale

$$y'_1 = \text{pendiente} = 4 \cdot 3{,}2 = 12{,}8.$$

La inclinación de la tangente en este punto se obtiene por la fórmula:

$$\operatorname{tg} \alpha = 12{,}8 \quad \therefore \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\, 12{,}8 = 85° \, 32'$$

La curva derivada es $y = f'(x)$, que es la recta $y = 4x$, que pasa por el origen.

EJEMPLO 2.º *Hallar:* a) *una expresión de la pendiente de la curva:*

$$y = x^3 - 2x + 4$$

en un punto cualquiera, y la ecuación de la curva derivada; b) *la inclinación de la tangente en el punto de abscisa* $x = 1{,}4$; c) *los puntos en los que la tangente tiene una inclinación de* 45°; d) *los puntos en los que la tangente es paralela a* OX (fig. 44).

Solución:

a) Pendiente $= y' = 3x^2 - 2$.
Ecuación de la curva derivada $y = 3x^2 - 2$.

b) Si α es la inclinación de la tangente en el punto $x = 1{,}4$:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_1 = 3 \cdot 1{,}4^2 - 2 = 3{,}88$$

luego $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\, 3{,}88 = 75° \, 32'$.

c) Si $\alpha = 45°$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$; luego $3x^2 - 2 = 1$, resultando $x^2 - 1 = 0$; $x = \pm 1$.

Los puntos pedidos son, pues (1, 3) y (— 1, 5).

d) En los puntos en que la tangente es paralela a OX, $\alpha = 0$ y tg $\alpha = 0$;

$\therefore\ 3x^2 - 2 = 0$, resultando $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0{,}8165$

Si $x = 0{,}8165$ se obtiene $y = 2{,}895$; y si $x = 0{,}8165$, $y = 5{,}102$.

Los puntos pedidos son **(0,8165, 2,895)** y **(— 0,8165, 5,102)** señalados en A y B en la figura 44, que contiene la curva dada y la curva derivada. Se ve que la curva derivada cruza al eje OX para aquellos valores de x, para los cuales la curva dada es paralela al eje OX, como debe suceder.

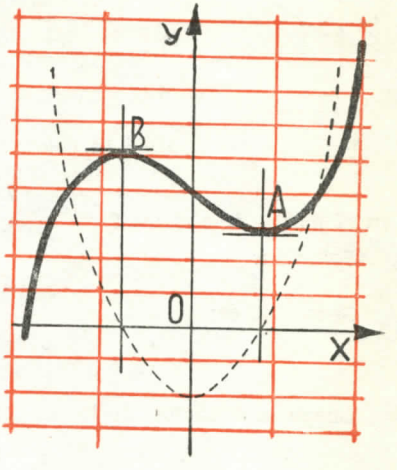


FIG. 44

EJEMPLO 3.º *Hallar la expresión de la pendiente en un punto cualquiera de la curva:*

$$y = \frac{1}{2}(x-3)(x^2+1)$$

y hallar la inclinación α *de la curva en los puntos en que corta al eje* OX.

Efectuando el producto de los dos paréntesis, se tiene:

$$y = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + x - 3)$$

y derivando:

$$y' = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x + 1)$$

En los puntos en que la curva cruza al eje OX, $y = 0$, luego $(x-3)(x^2+1) = 0$, resultando sólo $x = 3$. Las otras raíces son imaginarias.

En ese punto tg $\alpha = 1/2(3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 1) = 5$.

Luego $\alpha = \text{arc tg } 5 = 78° 42'$.

114. Ecuaciones de la tangente y de la normal.—La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene la pendiente m es (núm. 39):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si esta recta es tangente a la curva AB en el punto $P_1(x_1, y_1)$, entonces m es igual a la derivada y' de la función de la curva, particularizada para el punto de contacto; es decir (figura 45):

$$m = y'_1$$

Luego en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$ la ecuación de la tangente TP_1 es:

$$\mathbf{y - y_1 = y'_1(x - x_1)} \qquad [3]$$

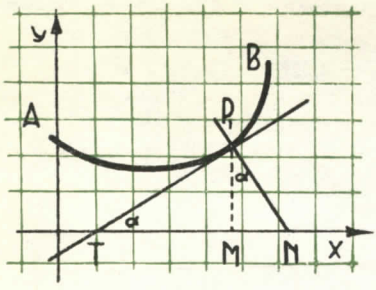


FIG. 45

Siendo la normal perpendicular a la tangente en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$, su pendiente es (núm. 58):

$$-\frac{1}{y'_1}$$

Luego la *ecuación de la normal* P_1N es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_1}(x - x_1) \quad [4]$$

EJEMPLO 1.º *Hallar la ecuación de la tangente a la curva:*

$$y = x^2 + 3x$$

en el punto de abscisa 2.

Solución:

$$y' = 2x + 3$$

Si $x_1 = 2$, es:

$$y_1 = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$$
$$y'_1 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

Luego la ecuación de la tangente pedida es:

$$y - 10 = 7(x - 2)$$

o bien:

$$y = 7x - 4$$

EJEMPLO 2.º *Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, en el punto de abscisa* 3 *de la parábola* $y = \frac{1}{4}x^2$ (fig. 46).

Aquí el punto de contacto (x_1, y_1) es:

$$x_1 = 3 \quad , \quad y_1 = \frac{9}{4}$$

y la derivada vale:

$$y' = \frac{2}{4}x = \frac{x}{2}$$

$$y'_1 = \frac{3}{2}$$

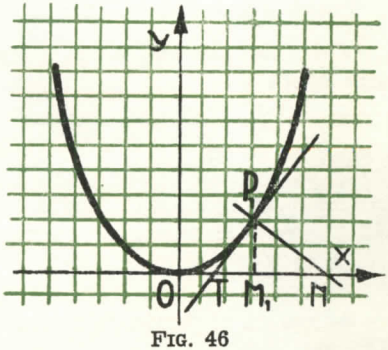


FIG. 46

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y - \frac{9}{4} = \frac{3}{2}(x - 3), \quad \text{o sea,} \quad 6x - 4y - 9 = 0$$

La ecuación de la normal en el mismo punto será:

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{2}{3}(x - 3), \text{ o sea, } \mathbf{8x + 12y - 51 = 0}$$

EJEMPLO 3.º *Hallar la ecuación de la tangente a la curva* $\mathbf{x^2 + y^2 - 4y - 9 = 0}$ *en el punto* (2, 5).

Derivando:

$$2x + 2yy' - 4y' = 0$$

Despejando:

$$y' = \frac{2x}{4 - 2y} = \frac{x}{2 - y} \quad ; \quad y'_1 = \frac{2}{2 - 5} = -\frac{2}{3}$$

Tangente:

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 2) \quad ; \quad 3y - 15 = -2x + 4$$

o sea:

$$\mathbf{2x + 3y - 19 = 0}$$

115. **Angulo de intersección de dos curvas.**—Se llama así al ángulo que forman las tangentes a las curvas en el punto de intersección de ambas.

Para determinar el ángulo de intersección de dos curvas:

a) Se resuelve el sistema de ecuaciones de las curvas, para hallar los puntos de intersección.

b) Se hallan las tangentes a las curvas en cada punto de intersección.

c) Se hace uso de la fórmula:

$$\cos \varphi = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

EJEMPLO. *Hallar el ángulo de intersección de las curvas:*

$$x^2 + y^2 - 4x = 1 \qquad \text{(A)}$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 9 \qquad \text{(B)}$$

Solución. — Resolviendo este sistema de ecuaciones, resultan dos puntos de intersección (3, 2) y (1, —2) (fig. 47).

Sea m_1 la pendiente de la tangente al círculo A en (3, 2) y m_2 la pendiente de la tangente al círculo B en el mismo punto.

De (A) deducimos:

$$2x + 2yy' - 4 = 0 \quad ;$$

$$y' = \frac{2 - x}{y}$$

$$m_1 = y'_1 = \frac{2 - 3}{2} = -1/2$$

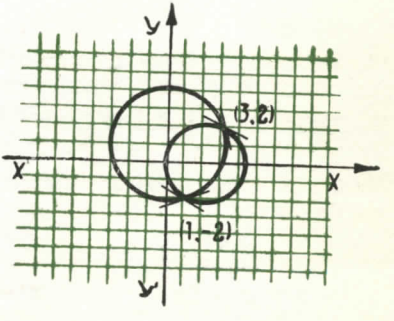


FIG. 47

De (B), análogamente:

$$2x + 2yy' - 2y' = 0 \quad ; \quad y = \frac{x}{1-y}$$

$$m_2 = y'_1 = \frac{3}{1-2} = -3$$

Tenemos, pues:

tangente a (A) en (3, 2): $y - 2 = -\frac{1}{2}(x-3)$; $x + 2y - 7 = 0$

tangente a (B) en (3, 2): $y - 2 = -3(x-3)$; $3x + y - 11 = 0$

La fórmula para hallar el ángulo α entre las dos rectas es:

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha = 45°$$

Este es también el ángulo de intersección en el punto $(1, -2)$.

EJERCICIOS

Halla las inclinaciones de las curvas siguientes en los puntos que se indican:

1. $y = x^3$ en (0, 0).
2. $2y + 7 = x^3$ en (3, 10).
3. $y^2 = 6x(x^2 - 1)$ en (2, 6).
4. $x^4 + y^4 = 17$ en $(-2, 1)$.
5. $y = \frac{x}{1+x^2}$ en (2, 2/5).

Halla las ecuaciones de la tangente y normal de las siguientes curvas:

6. $y = 2x^2 - 4x + 5$ en (3, 11).
7. $y = \frac{5x^2}{1+x^2}$ en (2, 4).
8. $2x^2 - xy + 3y^2 = 18$ en (3, 1).
9. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ en $(2, -1)$

10. Halla la ecuación de la tangente, por el punto $(2, -2)$, a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.
11. Halla las ecuaciones de las tangentes con pendiente $m = -\frac{2}{9}$ a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$.
12. Halla el área del triángulo formado por el eje OX, la tangente y la normal a la curva $y^2 = 8x$ en el punto (2, 4).
13. Halla el área del triángulo formado por el eje OY, la tangente y la normal a la curva $4x^2 + y^2 = 20$ en el punto $(1, -4)$.
14. Halla los ángulos de intersección de cada uno de los siguientes pares de curvas:

1.ª	$y^2 = 4x$	;	$2x^2 = 12 - 5y$
2.ª	$xy = 6$	;	$x^2y = 12$
3.ª	$y^2 = 8x$	;	$x^2 = 4y + 12$.
4.ª	$x^2 + y^2 = 16$	;	$x^2 + y^2 = 6x$.

15. Halla los puntos de contacto de las tangentes horizontal y vertical de las siguientes curvas:

a) $y = x^2 - 6x$. *c)* $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$

b) $x = 3y - y^2$ *d)* $x^2 + xy + y^2 = 27$

16. Haz ver que la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ y la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ se cortan en ángulo recto.

17. Halla la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 16x$ que forma un ángulo de 45° con el eje OX.

18. Halla las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, que son paralelas a la recta $4x + 3y = 12$.

19. Halla las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 36$, que son perpendiculares a la recta $2x + 5y = 4$.

20. Halla las ecuaciones de las dos tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 18$, que pasan por el punto (2, 2).

21. Demuestra que la tangente en cualquier punto de la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ determina en los ejes dos segmentos de suma constante $= a$.

22. La ecuación de la trayectoria de una pelota es $y = x - \frac{x^2}{100}$; la unidad de distancia es el metro; el eje OX es horizontal y el origen es el punto de lanzamiento. *a)* ¿Con qué ángulo es lanzada? *b)* ¿Con qué ángulo pega en una pared vertical que dista 75 m. del punto de lanzamiento? *c)* Si la pelota cae sobre una azotea horizontal de 16 m. de alta, ¿con qué ángulo pega en la azotea? *d)* Si se lanza desde el tejado de un edificio de 24 metros de alto, ¿con qué ángulo pegará en el suelo? *e)* Si se lanza desde la ladera de una colina cuya inclinación es de 45°, ¿con qué ángulo pegará la pelota en el suelo?

23. El cable de suspensión de un puente colgante tiene la forma de parábola y pende de dos soportes que distan 80 m. La flecha es de 6 m. Halla el ángulo entre el cable y los soportes (fig. 48).

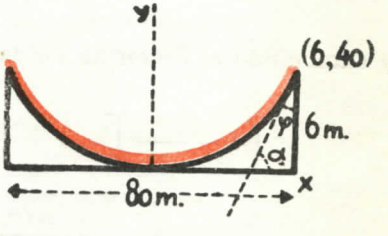


FIG. 48

En cada uno de los tres problemas siguientes halla: *a)* los puntos de intersección de los pares de curvas dadas; *b)* la pendiente de la tangente a cada curva, y el ángulo entre las tangentes en cada punto de intersección:

24. $y = 2 - x^2$, $y = x^2$

25. $y = x^2 - 5$, $y = 3x - 5$

26. $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 7 + 2x - x^2$

27. Halla la tangente y normal de $xy + 2x - y = 5$ en el punto (2, 1).

14

Derivación de las funciones logarítmica y experimental

116. **Definición del número** e.—Este número, que desempeña un papel muy importante en las Matemáticas, se define así:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad [1]$$

Por la fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio tenemos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n};$$

y cambiando el orden de los factores en cada denominador:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} +$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n^n}$$

Podemos simplificar las fracciones en n, y expresarlas como producto de factores, así:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1]}{n^n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} = \frac{n-(n-1)}{n} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Resulta, pues,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

A medida que n crece, va aumentando el número de sumandos del segundo miembro y además éstos van aumentando, por disminuir los sustraendos de los paréntesis. Luego el primer miembro va creciendo, obteniéndose una sucesión monótona creciente. Por otra parte, los términos de dicha sucesión se conservan constantemente inferiores a 3, ya que sustituyendo en el anterior desarrollo cada paréntesis por la unidad se obtiene otro de términos mayores, esto es

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} \qquad [2]$$

Pero por ser

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\ldots n}<\frac{1}{2\,.\,2\,.\,2\ldots 2}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

resulta

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

ya que la progresión geométrica ilimitada $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots$ suma

$$\frac{1}{2}:\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1$$

Luego, la sucesión monótona creciente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que se conserva constantemente inferior a 3, es acotada y tiene un límite.

La fórmula [2] da un valor de e tanto más aproximado cuanto mayor es n. Puede demostrarse que el error cometido es tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande, por lo que puede escribirse:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Luego también podemos definir el número e como el resultado de sumar un número infinito de quebrados, cuyo numerador es siempre la unidad, y los denominadores son los factoriales sucesivos de los números naturales, empezando por el cero; es decir:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots \qquad [3]$$

117. **Valor del número e.**—El número e es irracional. Su valor se determina fácilmente con la aproximación que se desee, pues la serie [3] es rápidamente convergente. Así, si queremos obtener el número e con seis decimales exactos, bastará tomar los términos de dicha serie con siete cifras decimales (núm. 11). Así:

$1+1/1! = 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	2,0000000
$1/2! = 1/2 = 0{,}5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0,5000000
$1/3! = 1/2\,.\,3 = (1/2) : 3 = 0{,}5 : 3 = \ldots\ldots\ldots$	0,1666666
$1/4! = 1/3!\,.\,4 = (1/3!) : 4 = 0{,}\overset{\frown}{16} : 4 = \ldots\ldots$	0,0416666
$1/5! = (1/4!) : 5 = 0{,}0\overset{\frown}{416} : 5 = \ldots\ldots\ldots$	0,0083333
$1/6! = 0{,}0083333 : 6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0,0013888
$1/7! = 0{,}0013888 : 7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0,0001984
$1/8! = 0{,}0001984 : 8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0,0000248
$1/9! = 0{,}0000248 : 9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0,0000027
$1/10! = 0{,}0000027 : 10 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0,0000002
$e = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	2,7182814

Luego, con seis cifras exactas:

$$e = 2{,}718281$$

118. **Interés continuo.**—Para que se vea cómo el número e se presenta de un modo natural en las aplicaciones prácticas, hallaremos la fórmula del *interés continuo*.

En Quinto Curso vimos que cuando los intereses se capitalizan m veces por año, la fórmula del interés compuesto es:

$$F_t = C\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{tm} \qquad [4]$$

siendo i el tanto por 1 y C el capital inicial. Si el número de períodos de capitalización se hace tender a infinito ($m \to \infty$), o sea, si los intereses producidos se añaden en cada instante al capital para producir nuevos intereses, se obtiene lo que se denomina el *interés continuo*. Será entonces:

$$F_t = \lim_{m\to\infty}\left[C\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}\right] = C\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m/i}\right)^{tm} =$$

$$= C\cdot\lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{m/i}\right)^{m/i}\right]^{it} = C\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{it}$$

llamando $m/i = n$; se observa que por ser i constante, si $m\to\infty$, también $n\to\infty$. Se tiene, pues, para el interés continuo:

$$F_1 = C \cdot e^{it} \qquad [5]$$

119. Crecimiento continuo.—En las leyes puestas por el Creador a la materia observaremos que nunca se procede por saltos, sino de una manera continua. En un cuerpo que crece (por ejemplo, la madera de un bosque), notaremos las dos leyes siguientes: 1.º, el aumento sufrido en un cierto instante es proporcional a la cantidad de materia que el cuerpo tiene en ese instante; 2.º, los incrementos experimentados se añaden en cada instante a la cantidad anterior para producir nuevos aumentos.

Estas son las dos leyes del llamado *crecimiento continuo*, que es fácil ver son las mismas que las del interés continuo. Su fórmula será, por tanto, análoga a la relación [5], o sea:

$$F = C\, e^{\lambda t} \qquad [6]$$

donde F es la cantidad final del cuerpo, C la cantidad inicial y λ el aumento sufrido por la unidad de materia en la unidad de tiempo (análogamente a i).

120. Decrecimiento continuo.—Si en vez de aumentar, el cuerpo disminuye con las mismas características, se tiene la ley del *decrecimiento continuo*. Entonces λ es negativo y, por tanto, la fórmula es:

$$F = C\, e^{-\lambda t}$$

Otra característica del crecimiento continuo es la siguiente: *el cuerpo tarda siempre el mismo tiempo en duplicarse*, para el crecimiento,

o en reducirse a la mitad, para el decrecimiento, *cualquiera que sea la cantidad inicial.* Se comprueba mediante la fórmula. Por ejemplo, en la [6], si $F = 2C$ será:

$$2C = C\,e^{\lambda t} \quad ; \quad 2 = e^{\lambda t}$$

$$\log 2 = \lambda t \log e \quad ; \quad t = \frac{\log 2}{\lambda \log e}$$

El tiempo que tarda el cuerpo en duplicarse es constante.

Un ejemplo típico de decrecimiento continuo es el que experimentan las *sustancias radiactivas.* El tiempo que tardan en reducirse a la mitad es siempre el mismo, y se llama *período de semidesintegración.*

121. **Logaritmos neperianos.**—Son los que tienen como base el número e. Los representaremos por la notación abreviada L. Así, Lx se lee *logaritmo neperiano* de x.

De la definición se deduce que la igualdad

$$y = Lx$$

es equivalente a:

$$x = e^{\lambda}$$

El nombre de los logaritmos neperianos proviene del Barón de Neper, que fue quien primero los calculó y tabuló, aun antes de conocerse los logaritmos vulgares, por ser más fáciles de calcular que éstos.

Los logaritmos neperianos son los únicos que se emplean en la Teoría de funciones, por la razón que veremos más adelante.

122. **Cambio de base de logaritmos.**—Frecuentemente se desea pasar de una base a otra de logaritmos. Esto se hace como sigue: Supongamos conocidos los logaritmos en el sistema de base a y que queremos conocer los de base b.

Sea:

$$x = \log_a N \quad , \quad y = \log_b N$$

Luego:

$$a^x = N \quad , \quad b^y = N \quad ; \quad a^x = b^y$$

Tomando logaritmos en la base a de la última igualdad resulta:

$$x = y \log_a b;$$

o sea

$$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b \qquad [7]$$

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \qquad [8]$$

REGLA.—*Para calcular los logaritmos en un sistema de base* b, *conocidos los de base* a, *basta dividir éstos por el logaritmo de la base nueva en el sistema conocido.*

En particular, si hacemos $N = a$, tenemos, ya que $\log_a a = 1$:

$$1 = \log_b a \cdot \log_a b \qquad [9]$$

igualdad que nos dice: *Los logaritmos de las bases, tomando cada uno en la otra base, son recíprocos.* Esto es, cada uno es el inverso o recíproco del otro.

123. Cálculo de los logaritmos decimales.—Calculados los logaritmos de base e por un procedimiento que no podemos explicar aquí, se pasa de ellos a los logaritmos decimales mediante la fórmula [8], haciendo en ella $b = 10$ y $a = e$, con lo cual se convierte en:

$$\log_{10} N = \frac{LN}{L10} = LN \cdot \frac{1}{L10} \qquad [10]$$

El número $\dfrac{1}{L10}$ se llama *módulo* del sistema de logaritmos de base 10, y su valor es $\dfrac{1}{L10} = \log e = 0{,}434294\ldots = M$, pues se acostumbra a representar dicho valor por M. Luego la fórmula [10] se escribirá:

$$\log_{10} N = M \cdot LN \qquad [11]$$

Que nos dice: *El logaritmo decimal de un número se obtiene multiplicando su logaritmo neperiano por el módulo.*

124. Derivada de la función logarítmica.—Se trata de hallar la derivada de la función:

$$y = \log_a u \quad ; \quad (u > 0, \quad a > 0 \quad \text{y} \quad a \neq 1)$$

Apliquemos la regla general, considerando u como variable independiente:

Paso primero:

$$y + \Delta y = \log_a (u + \Delta u).$$

Paso segundo:

$$\Delta y = \log_a (u + \Delta u) - \log_a u = \log_a \frac{u + \Delta u}{u} =$$

$$= \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

Con el fin de reducir esta expresión al número e y quitar la indeterminación $\infty \cdot 0$, se multiplica y divide por u, y se pone en forma de logaritmo de una potencia, o sea:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) =$$

$$= \frac{1}{u} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u} = \frac{1}{u} \log_a \left(1 + \frac{1}{u}\right)^n$$

llamando $n = \dfrac{u}{\Delta u}$, donde se ve que $n \to \infty$ cuando $\Delta u \to 0$.

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{u} \cdot \lim_{n \to \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{u} \log_a e$$

o sea:

$$y' = \frac{1}{u} \log_a e$$

Como u es función de x, en virtud de la fórmula x de una función de función, será:

$$y' = u' \cdot \frac{1}{u} \cdot \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

o sea:

XV. $$\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

125. **Casos particulares.**—Si se tratara de la función:

$$y = Lx$$

dado que $Le = 1$, se tendría, aplicando la fórmula XV:

XVI. $$\frac{d}{dx} (Lx) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

Esta es la razón de que en Algebra superior no se empleen otros logaritmos que los neperianos: su derivada es la más sencilla posible.

Tratándose del logaritmo vulgar o decimal

$$y = \log x$$

se tiene:

$$\log e = \frac{1}{\mathrm{L}\ 10} = \mathrm{M} \quad ;$$

por tanto,

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{M} = \frac{\mathrm{M}}{x}$$

126. **Derivada logarítmica de una función.**—Se llama *derivada logarítmica* de una función u a la derivada del logaritmo neperiano de dicha función; es decir, a la derivada de:

$$y = \mathrm{L}u$$

Para hallarla es preciso aplicar la regla XV:

XVII. $$\frac{d}{dx}(\mathrm{L}u) = \frac{u'}{u} \cdot \mathrm{L}e = \frac{u'}{u}$$

La derivada *logarítmica de una función es igual a la derivada de la función, dividida por la misma función.*

EJEMPLO 1.° *Derivar la función:*

$$y = \mathrm{L}(x^2 + 7)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 7}$$

EJEMPLO 2.° *Derivar:*

$$y = \mathrm{L}\sqrt{1 - x^2}$$

Antes de derivar conviene desarrollar el logaritmo todo lo posible:

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1 - x^2)$$

Luego:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

EJEMPLO 3.° *Derivar:*

$$y = \mathrm{L}\sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$$

Se tiene:

$$y = \frac{1}{2}[\mathrm{L}(1 + x^2) - \mathrm{L}(1 - x^2)]$$

Luego:

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 - x^2}\right] = \frac{2x}{1 - x^4}$$

EJEMPLO 4.º *Derivar:*

$$y = \mathrm{L}\frac{x^3(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y = 3\mathrm{L}x + 2\mathrm{L}(x^2 - 1) - 2\mathrm{L}(x^2 + 1)$$

Luego:

$$y' = \frac{3}{x} + \frac{4x}{x^2 - 1} - \frac{4x}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{3(x^4 - 1) + 4x^2(x^2 + 1) - 4x^2(x^2 - 1)}{x(x^4 - 1)} = \frac{3x^4 + 8x^2 - 3}{x(x^4 - 1)}$$

127. **Derivada de la función exponencial.**—Sea:

$$y = a^u$$

donde a es una constante y u una función de x. Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros:

$$\mathrm{L}y = u\mathrm{L}a$$

y derivando ambos miembros de x, en virtud de XVII, tendremos:

$$\frac{y'}{y} = u' \cdot \mathrm{L}a$$

Luego:

$$y' = y \cdot u' \cdot \mathrm{L}a = a^u \cdot u' \cdot \mathrm{L}a$$

XVIII. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^u) = a^u \cdot u' \cdot \mathrm{L}a$$

La derivada de la función exponencial es igual a la misma función multiplicada por la derivada del exponente y por el logaritmo neperiano de la base.

128. **Casos particulares.**—Sea hallar la derivada de:

$$y = a^x$$

Aplicando la fórmula XVIII, se tiene:

$$y' = a^x \cdot 1 \cdot La = \mathbf{a^x \cdot La}$$

Si queremos derivar la función

$$y = e^x$$

y aplicamos la fórmula anterior:

$$y' = e^x \cdot Le = \mathbf{e^x}$$

EJEMPLO 1.º *Derivar:*

$$y = 5^{3x^2}$$

$$y' = 5^{3x^2} \cdot L5 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2) = \mathbf{5^{3x^2} \cdot L5 \cdot 6x}$$

EJEMPLO 2.º *Derivar:*

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

$$y' = e^{\sqrt{x}} \cdot Le \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

EJEMPLO 3.º *Derivar la función:*

$$y = b \cdot e^{cz^2+x^2}$$

$$y' = b \cdot \frac{d}{dx}(e^{cz^2+x^2}) = b \cdot e^{cz^2+x^2} \cdot Le \cdot 2x = \mathbf{2bx \cdot e^{cz^2+x^2}}$$

129. Derivada de la potencia de una función con exponente cualquiera.—Sea la función:

$$y = u^m \qquad (u > 0)$$

donde m es un número real cualquiera.

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros:

$$Ly = mLu$$

Derivando por la fórmula XVII ambos miembros:

$$\frac{y'}{y} = m \cdot \frac{u'}{u}$$

de donde:

$$y' = m\frac{y}{u}u' = m\frac{u^m}{u}u' = mu^{m-1}u'$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(u^m) = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$$

Fórmula idéntica a la VII, pero obtenida por un procedimiento que sólo exige de m que sea un número real cualquiera.

130. Derivada de la función exponencial general $y = u^v$.—Sea:

$$y = u^v \qquad (u > 0)$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros:

$$Ly = vLu$$

y derivando ambos respecto de x:

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot Lu + v \cdot \frac{u'}{u}$$

o sea:

$$y' = y \cdot v'Lu + y \cdot v \cdot \frac{u'}{u} = u^v \cdot v' \cdot Lu + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

$$\frac{d}{dx}(u^v) = u^v \cdot v' \cdot Lu + vu^{v-1} \cdot u'$$

La derivada de una función potencial con exponente variable es igual a la suma de los dos resultados obtenidos, derivando primero como potencia, considerando el exponente como constante, y derivando de nuevo como exponencial considerando la función como constante.

EJEMPLO 1.º *Hallar la derivada de la función:*

$$y = x^x$$

Aplicando la regla:

$$y' = x^x \cdot 1 \cdot Lx + x \cdot x^{x-1} \cdot 1 = x^x(Lx + 1)$$

EJEMPLO 2.º *Derivar la función:*

$$y = x^{e^x}$$

Lo mejor es tomar logaritmos neperianos y derivar los dos miembros respecto de x:

$$\mathrm{L}y = e^x \cdot \mathrm{L}x$$

$$\frac{y'}{y} = e^x \cdot \mathrm{L}x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \left[\mathrm{L}x + \frac{1}{x} \right]$$

Luego:

$$y' = y \cdot e^x \left(\mathrm{L}x + \frac{1}{x} \right) = \mathbf{x^{e^x} \cdot e^x \left(Lx + \frac{1}{x} \right)}$$

EJERCICIOS

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = \mathrm{L}(2x - 1)$
2. $y = \mathrm{L}(2 - x)$
3. $y = \mathrm{L}(x^2 - 1)$
4. $y = \mathrm{L}(a + bx^2)$
5. $y = \mathrm{L}(x^2 - 3x - 1)$
6. $y = x^n \mathrm{L}x$
7. $y = x^2 \mathrm{L}(2 - x)$
8. $y = x\mathrm{L}(1 - x^2)$
9. $y = \dfrac{\mathrm{L}x}{x}$
10. $y = \dfrac{\mathrm{L}x}{x^n}$
11. $y = \dfrac{\mathrm{L}(ax + b)}{x^2}$
12. $y = \dfrac{\mathrm{L}x}{\sqrt{x}}$
13. $y = \mathrm{L}[x^n(x + 2)]$
14. $y = \mathrm{L}\sqrt[n]{1 + x^n}$
15. $y = \mathrm{L}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
16. $y = \mathrm{L}\dfrac{x(1 - x)}{(3 - x)^2}$
17. $y = \mathrm{L}\sqrt{x(1 - x)}$
18. $y = \mathrm{L}\dfrac{(x - 1)^2}{2x - 3}$
19. $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1})$
20. $y = \mathrm{L}(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1})$
21. $y = e^{4x}$
22. $y = e^{3-x}$
23. $y = e^{a+bx}$
24. $y = e^{x^2}$
25. $y = x^3 e^{3x}$
26. $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$
27. $y = \dfrac{e^{ax}}{\sqrt{x}}$
28. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{e^x}$
29. $y = a^{nx}$
30. $y = e^{x^3}$
31. $y = \dfrac{1}{e^{2x}}$
32. $y = e\sqrt{x}$
33. $y = 10^{x/2}$

34. $y = \dfrac{a}{e\sqrt{x}}$

35. $y = \mathrm{L}\,(xe^x)$

36. $y = \mathrm{L}\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

37. $y = \dfrac{a}{2}\,[e^{x/a} - e^{-x/a}]$

38. $y = \mathrm{L}\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$

39. $y = (\mathrm{L}x)^x$

40. $y = \left(-\dfrac{a}{x}\right)^x$

41. $y = \dfrac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{3x+1}}$

42. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

43. $y = x^{x^2}$

44. $y = x^{1/x}$

45. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \mathrm{L}x$ paralela a la recta

$$3x - y = 2$$

46. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x\mathrm{L}x$ paralela a la recta

$$3x - y = 5$$

15

Derivación de las funciones goniométricas

131. Derivada de sen u.—Sea derivar la función:

$$y = \text{sen } u$$

Por la regla general, considerando u como variable independiente:

Paso primero:

$$y + \Delta y = \text{sen } (u + \Delta u)$$

Paso segundo:

$$\Delta y = \text{sen } (u + \Delta u) - \text{sen } u =$$

$$= 2 \cos \frac{u + \Delta u + u}{2} \cdot \text{sen } \frac{u + \Delta u - u}{2} \qquad (*)$$

$$\Delta y = 2 \cos \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right) \text{sen } \frac{\Delta u}{2}$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right) \cdot \frac{\text{sen } \dfrac{\Delta u}{2}}{\dfrac{\Delta u}{2}}$$

Ya que:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \cos \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right) = \cos u \quad ; \quad \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\text{sen } \dfrac{\Delta u}{2}}{\dfrac{\Delta u}{2}} = 1$$

según el número 87, se tendrá:

(*) Véase nuestro *Quinto Curso* de Matemáticas.

Paso cuarto:

$$y' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos u$$

o sea:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{du}} \mathbf{sen\ u} = \mathbf{cos\ u}$$

Como u es una función de x, aplicando la fórmula X, se tiene:

$$y' = (\cos u)u' = u' \cos u$$

XIX. $$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} \mathbf{(sen\ u) = u' cos\ u}$$

132. Derivada de cos u.—Aquí no seguiremos la regla general. Sea la función:

$$y = \cos u$$

que puede escribirse:

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

Derivando ésta por la fórmula XIX:

$$y' = \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -u' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) =$$

$$= -u' \operatorname{sen} u$$

o sea:

XX $$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} \mathbf{(cos\ u) = -u' sen\ u}$$

133. Derivada de tg u.—Sea:

$$y = \operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

Derivando como cociente:

$$y' = \frac{u' \cos u \cdot \cos u + u' \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen} u}{\cos^2 u}$$

$$y' = \frac{u'(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)}{\cos^2 u} = u'\left(\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}\right) =$$

$$= u'(1 + \operatorname{tg}^2 u).$$

Pero también:

$$y' = \frac{u'(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)}{\cos^2 u} = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \sec^2 u$$

XXI. $$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$$

134. Derivadas de las restantes funciones circulares directas.—Partiendo de las fórmulas:

$$\operatorname{cotg} u = \frac{1}{\operatorname{tg} u}, \quad \sec u = \frac{1}{\cos u}, \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$$

deducimos los siguientes resultados:

XXII. $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} u) = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u =$$
$$= -u'(1 + \operatorname{ctg}^2 u)$$

XXIII. $$\frac{d}{dx}(\sec u) = u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u$$

XXIV. $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -u' \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$$

EJEMPLO 1.º *Derivar las siguientes funciones:*

$$y = \operatorname{sen} ax^3$$

Solución:

$$y' = \cos ax^3 \frac{d}{dx}(ax^3) = 3ax^2 \cos ax^3$$

EJEMPLO 2.º:

$$y = \operatorname{tg} \sqrt{1 - x^2}$$

Solución:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2} \cos^2 \sqrt{1-x^2}}$$

EJEMPLO 3.º

$$y = \cos^4 x$$

Solución:
Puede escribirse:

$$y = (\cos x)^4$$

$$y' = 4(\cos x)^3 \frac{d}{dx} \cos x = 4 \cos^3 x(-\operatorname{sen} x) = -4 \operatorname{sen} x \cos^3 x$$

135. **Derivación de las funciones circulares inversas.**—1.º *Derivar la función* $y = \text{arc sen } u$.

Despejando u en esta función, tenemos:

$$u = \operatorname{sen} y$$

Derivando ambos miembros respecto a x:

$$u' = y' \cos y$$

De donde:

$$y' = \frac{u'}{\cos y} = \frac{u'}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Por tanto:

XXV $$\frac{d}{dx} (\text{arc sen } u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

2.º *Derivar la función* $y = \text{arc cos } u$.
Procediendo como en el ejemplo anterior, se tiene:

$$u = \cos y \quad ; \quad u' = -y' \operatorname{sen} y$$

$$y' = -\frac{u'}{\operatorname{sen} y} = -\frac{u'}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Por tanto:

XXVI. $$\frac{d}{dx} (\text{arc cos } u) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

CUADRO DE DERIVADAS

FUNCIONES	DERIVADAS	FUNCIONES	DERIVADAS
$y = k$	$y' = 0$	$y = \mathrm{L}u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
$y = x$	$y' = 1$	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \mathrm{L}a \cdot u'$
$y = u \pm v \pm w$	$y' = u' \pm v' \pm w'$	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \mathrm{L}a$
$y = u \cdot v$	$y' = uv' + vu'$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = cu$	$y' = cu'$	$y = u^v$	$y' = u^v \mathrm{L}u \cdot v' + vu^{v-1}u'$
$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$	$y = \operatorname{cotg} u$	$y' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}$
$y = \dfrac{u}{c}$	$y' = \dfrac{u'}{c}$	$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot \operatorname{tg} u$
$y = f(u), u = \varphi(x)$	$y'_x = y'_u \cdot u'_x$	$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u$
$y = f(x), x = \varphi(y)$	$y'_x \cdot x'_y = 1$	$y = \operatorname{arc\,sen} u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u} \cdot \log_a e$	$y = \operatorname{arc\,cos} u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \mathrm{L}x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \operatorname{arc\,tg} u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$y = \operatorname{tg} x$

$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3.º *Derivar la función* y = arc tg u.

Análogamente a los dos ejemplos anteriores, se obtiene sucesivamente:

$$u = \text{tg } y \quad ; \quad u' = y'(1 + \text{tg}^2\, y)$$

$$y' = \frac{u'}{1 + \text{tg}^2\, y} = \frac{u'}{1 + u^2}$$

Por tanto:

XXVII. $$\frac{d}{dx}(\text{arc tg } u) = \frac{u'}{1 + u^2}$$

EJEMPLO.—*Hallar la derivada de la función:*

$$y = \text{arc tg } \sqrt{x}$$

Solución.—Aplicando la fórmula XXVII:

$$y' = \frac{1/2\sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$$

EJERCICIOS

Halla la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \text{tg } \sqrt{x}$
2. $y = \cos\,(7x^2 + 5)$
3. $y = \text{sen}^3\, x$
4. $y = \text{tg}^3\, x$
5. $y = \text{sen } 5x$
6. $y = \text{sen } (nx^2 - a)$
7. $y = \cos \dfrac{x^2}{p}$
8. $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{5} - 2x\right)$
9. $y = \text{tg } 3x$
10. $y = \text{tg } (x^3 + a^3)$
11. $y = \text{cotg } mx^5$
12. $y = \text{cotg } (a - 2x)$
13. $y = \sec mx$
14. $y = \sec\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$
15. $y = \text{cosec } mx^3$
16. $y = \text{cosec}\left(b - \dfrac{x}{2}\right)$
17. $y = \text{sen}^3\, x$
18. $y = \cos^5 x$
19. $y = \sqrt{\text{sen } x}$
20. $y = \text{cosec}^2\, x$
21. $y = \sqrt{\text{cosec } x}$
22. $y = \sqrt[3]{\cos x}$
23. $y = \dfrac{\cos x}{x}$

24. $y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$

25. $y = \mathrm{L} \cos x$

26. $y = \mathrm{L} \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$

27. $y = e^{ax} \operatorname{sen} \pi x$

28. $y = e^{-x} \cos \dfrac{x}{2}$

29. $y = \mathrm{L} \operatorname{tg} x$

30. $y = \mathrm{L} \sqrt{\dfrac{1 + sen\ x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

31. $y = \operatorname{sen} (x + a) \cos (x - a)$

32. $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

33. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

34. Halla el punto de la curva $y = \mathrm{L}x^2$ en que la tangente es: *a)* paralela a la recta $x - 2y + 6 = 0$; *b)* perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$.

35. Halla las ecuaciones de la tangente y normal a la curva $y = \cos x$ en el punto en que $x = \dfrac{\pi}{2}$.

36. Halla las ecuaciones de la tangente y normal de la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto en que $x = \dfrac{\pi}{4}$.

37. Halla los ángulos que las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ forman entre sí en sus puntos de intersección.

38. Halla los ángulos de intersección de las gráficas de $y = x - \operatorname{sen} 2x$ e $y = x$ en los puntos en que $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Halla la derivada de las siguientes funciones:

39. $y = \operatorname{arc\ sen} (2x - 3)$

40. $y = \operatorname{arc} \cos x^2$

41. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x^2$

42. $y = \operatorname{arc\ cotg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$

43. $y = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\ sen} \dfrac{x}{a}$

44. $y = x \operatorname{arc\ cosec} \dfrac{1}{x} + \sqrt{1 - x^2}$

45. $y = \dfrac{1}{ab} \operatorname{arc\ tg} \left(\dfrac{b}{a} \operatorname{tg} x \right)$

46. $y^2 \operatorname{sen} x + y = \operatorname{arc\ tg} x$

16

Máximos y mínimos relativos

136. **Función creciente y función decreciente.**—*Una función* $y = f(x)$ *se llama* creciente *en un punto* x *si en un entorno suficientemente pequeño de éste el incremento* Δx *de la variable y el incremento* Δy *de la función son del mismo signo. Por consiguiente, su cociente* $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

Así es en F (fig. 49).

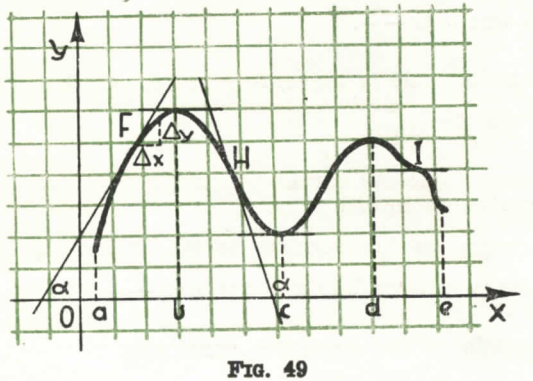


FIG. 49

Una función es creciente en un intervalo cuando lo es en cada uno de sus puntos. Así es en los intervalos (a, b) y (c, d).

Luego en los puntos de esos intervalos, la derivada, que es el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, será *positiva* (o nula).

Una función $y = f(x)$ *se llama* decreciente *en un punto* x *si en un entorno suficientemente pequeño de éste el incremento* Δx *de la variable y el incremento* Δy *de la función son de signos contrarios. Por consiguiente, su cociente* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *es negativo.* Así es en el punto H.

Una función es decreciente en un intervalo cuando lo es en cada uno de sus puntos. Así sucede en los intervalos (b, c) y (d, e).

Luego en los puntos de esos intervalos la derivada será *negativa* (o nula).

Los recíprocos son ciertos.

Si una función $y = f(x)$ *tiene derivada positiva en un punto* x, *es creciente en dicho punto.*

Pues de la definición de derivada se deduce:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \epsilon$$

donde ϵ tiende a cero con Δx. Luego:

$$\Delta y = (y' + \epsilon)\Delta x$$

Si y' es positiva, desde que ϵ sea menor en valor absoluto que y', será $y' + \epsilon$ positivo; luego Δy tendrá el mismo signo que Δx, y, por tanto, la función será creciente.

Si *una función* $y = f(x)$ *tiene derivada negativa en un punto, es decreciente en dicho punto.*

Si y' es negativa, desde que ϵ sea menor en valor absoluto que y', será $y' + \epsilon$ negativo; luego Δy tendrá signo contrario a Δx, y, por tanto, la función será decreciente.

EJEMPLO 1.º La derivada de la función $y = x^3$ es $y' = 2x$, que es negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y positiva en el intervalo $(0, +\infty)$. Luego la función $y = x^3$ es *decreciente* en el primero y *creciente* en el segundo (fig. 31).

EJEMPLO 2.º La derivada de $y = \frac{12}{x}$ es $y' = \frac{-12}{x^2}$, que es negativa para todo valor de x. Luego la función $y = \frac{12}{x}$ es *decreciente en cualquier intervalo* (figura 40).

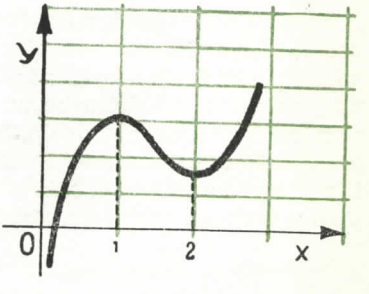


FIG. 50

EJEMPLO 3.º La derivada de

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

es

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

que es positiva en los intervalos

$$(-\infty, 1) \text{ y } (2, +\infty)$$

y negativa en el intervalo $(1, 2)$; por eso es creciente en los dos primeros y decreciente en este último (fig. 50).

137. Máximos y mínimos relativos de una función.—*Una función* $y = f(x)$ *tiene un máximo relativo en un punto* x_0 *cuando la ordenada en dicho punto es mayor que la de los puntos próximos a uno y otro lado,* y, por tanto, *la función es creciente a la izquierda de* x_0 *y decreciente a la derecha.* Por ejemplo, en la figura 49 existe un máximo en los puntos *b* y *d*.

Por tanto, como la derivada, que suponemos continua, pasa en ese punto de positiva a negativa, tiene que *anularse en él*. Además, como en un entorno del mismo esa derivada primera es una función decreciente, la derivada segunda será *negativa* en el mismo entorno.

Luego, *para que haya un máximo relativo en un punto, es condición necesaria y suficiente que la derivada primera sea nula y la derivada segunda sea negativa.*

La condición de que la derivada primera sea nula es necesaria, pero no suficiente; basta ver que la curva $y = x^3$ tiene por derivada $y' = 3x^2$, que es nula en el origen, y, sin embargo, no tiene en él máximo ni mínimo, sino un punto llamado de *inflexión*.

Una función $y = f(x)$ *tiene un* mínimo *relativo en un punto* x_0 *cuando la ordenada en dicho punto es menor que la de los puntos próximos a uno y otro lado,* y, por tanto, *la función es decreciente a izquierda de* x_0 *y creciente a derecha.* Así, en la figura 49 existe un mínimo en el punto c.

Por tanto, como la derivada primera, que suponemos continua, pasa en ese punto de negativa a positiva, tiene que *anularse en él*. Además, como en un entorno del mismo esa derivada primera es una función creciente, la derivada segunda será *positiva* en dicho entorno.

Luego, *para que haya un mínimo relativo en un punto, es condición necesaria y suficiente que la derivada primera sea nula y la derivada segunda sea positiva.*

138. **Convexidad y concavidad.**—*Un arco de curva es convexo respecto al eje* OY *cuando el punto* $+\infty$ *de éste y la curva quedan al mismo lado de las tangentes trazadas en sus puntos* (fig. 51). Cuando un punto $P(x, y)$ describe un arco convexo en el sentido de las x crecientes, la pendiente de la tangente en P crece. Así, en la figura, la pendiente crece cuando P describe el arco. Luego *en un arco convexo* $f'(x)$ *es una función creciente de* x. *Y, por tanto,* $f''(x)$ *será positiva.*

Un arco de curva es cóncavo respecto del eje OY *cuando el punto*

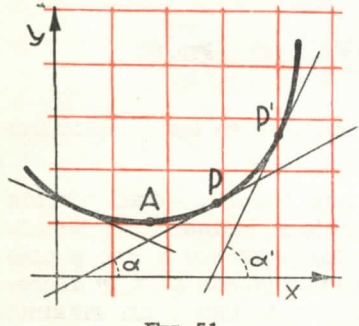


FIG. 51

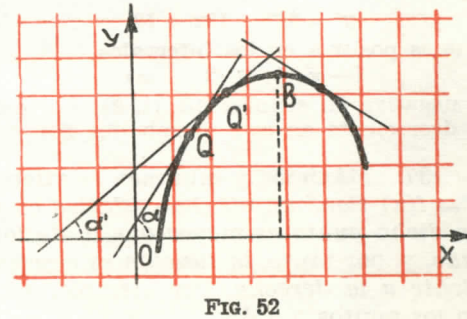


FIG. 52

$+\infty$ *de éste y la curva quedan a distinto lado de las tangentes trazadas en sus puntos* (fig. 52).

Cuando un punto $Q(x, y)$ describe un arco cóncavo en el sentido de las x crecientes, la pendiente de la tangente en Q decrece. Así, en la figura 52, la pendiente decrece cuando Q *describe el arco. Luego, en un arco cóncavo,* $f'(x)$ *es una función decreciente de* x. Y, por tanto, $f''(x)$ *será negativa.*

Luego tenemos el siguiente criterio para determinar el sentido de la concavidad en un punto:

La gráfica de $y = f(x)$ *es convexa respecto al eje* OY *si* y' *es creciente e* y'' *positiva, y será cóncava si* y' *es decreciente e* y'' *negativa.*

139. Regla para hallar los máximos y mínimos relativos.

Paso primero: Hallar la derivada primera de la función.

Paso segundo: Igualar a cero esta primera derivada y resolver la ecuación obtenida para hallar sus raíces reales.

Paso tercero: Hallar la derivada segunda.

Paso cuarto: Sustituir en ésta cada raíz real de la derivada primera. Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo relativo para esa raíz; si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo relativo.

Cuando $f''(x) = 0$, o no existe, se da el:

Paso quinto: Calcular $f'(x)$, primero para un valor muy poco inferior, y luego para un valor muy poco superior a cada una de sus raíces reales que anulan a $f'(x)$. Si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa, existe un máximo; si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva, existe un mínimo. *Justificar este paso quinto.*

El método de la derivada segunda, generalmente, es más corto. Y si hubiera que dar el paso quinto por las razones indicadas o porque el proceso de hallar la derivada segunda es demasiado largo, es conveniente descomponer $f'(x)$ en factores antes de calcularla.

EJEMPLO 1.º *Situar y clasificar los máximos y los mínimos relativos de:*

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$$

Solución: Hallamos:

$$y' = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2).$$

Haciendo $y' = 0$, obtenemos los valores críticos $x = -1$ y $x = 2$ (fig. 53).

Si aplicamos el criterio de la derivada segunda tenemos:

$$y'' = 2x - 1.$$

Para $x = -1$, $y'' = -3$: un máximo. Para $x = 2$, $y'' = 3$: un mínimo. Luego los puntos críticos son:

A(— 1, 19/6) máximo

B(2, — 4/3) mínimo

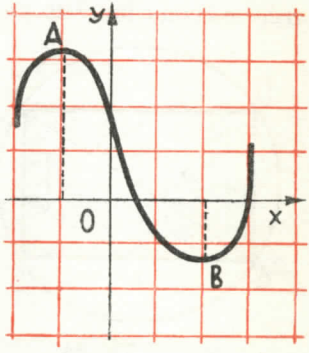


FIG. 53

EJEMPLO 2.º *Examinar la función* $y = x(x-1)^3$ *para hallar los máximos y mínimos relativos.*

Hallamos:

$$y' = 3x(x-1)^2 + (x-1)^3 = (x-1)^2(4x-1) \quad ;$$
$$y'' = 4(x-1)^3 + 2(x-1)(4x-1) = 6(x-1)(2x-1).$$

Igualando a cero y' obtenemos la ecuación:

$$(x-1)^2(4x-1) = 0$$

que se satisface para $(x-1)^2 = 0$, o sea: $x-1=0$; $x=1$.

y $\qquad 4x-1=0$; o sea $x = \dfrac{1}{4}$

Para $x = \dfrac{1}{4}$, $y'' = \dfrac{9}{4}$: un mínimo.

Cuando $x=1$, $y''=0$: luego en este punto no vale este criterio. Volvamos a la derivada primera; cuando x pasa por 1, y' no cambia de signo:

$$\text{para } x = \frac{3}{4} \quad , \quad y' = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 (3-1) > 0$$

$$\text{para } x = \frac{5}{4} \quad , \quad y' = \left(\frac{1}{4}\right)^2 (5-1) > 0$$

Luego el punto (1, 0) no es máximo ni mínimo; es un punto que más adelante llamaremos *de inflexión.*

El punto: $\qquad P\left(\dfrac{1}{4} \ , \ -\dfrac{27}{256}\right) =$ mínimo

140. Problemas de aplicación de los máximos y mínimos.

EJEMPLO 1.º *Se desea hallar las dimensiones de un rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 5 cm* (fig. 54).

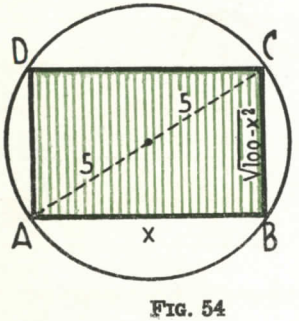


FIG. 54

Sea AB $= x$; luego BC $= \sqrt{100-x^2}$; y el área es:

$$S = x\sqrt{100-x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}$$

Paso primero:

$$S' = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Paso segundo:

$$100 - 2x^2 = 0;$$

raíces reales:

$$x = \pm 5\sqrt{2} = \pm 7{,}07$$

Se toma sólo el signo positivo del radical, ya que por la naturaleza del problema el signo negativo no tiene sentido.

El signo de S'' es el mismo que el de la derivada del numerador de S', o sea, que el de $-4x$ (*); este signo es negativo por ser x positivo.

Luego la función tiene un máximo para $x = 5\sqrt{2}$. La altura vale $\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. El rectángulo de área máxima es el *cuadrado inscrito* de lado $5\sqrt{2}$ cm.

EJEMPLO 2.º *Se desea construir una caja abierta, de base cuadrada y de cabida 108 litros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que tenga mínima superficie y, por tanto, mínimo coste?* (fig. 55).

Sea x = longitud del lado del cuadrado de la base, en decímetros, e y = altura de la caja.

Volumen $= x^2y = 108$; $\therefore\ y = \dfrac{108}{x^2}$

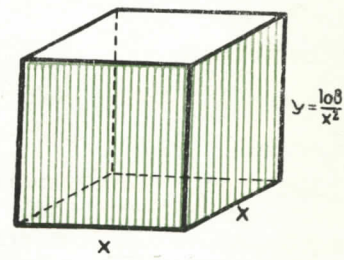


FIG. 55

Ahora podemos expresar el número de decímetros cuadrados de chapa deseados, en función de x, como sigue:

$$\text{Area pedida} = S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{432}{x}$$

(*) Cuando y' es igual al cociente de dos funciones, esto es, $y' = \dfrac{N(x)}{D(x)}$, siendo $D > 0$, para hallar los puntos críticos basta hacer $N = 0$; y para caracterizarlos, el signo de y'' será el mismo que el de N' pues

$$y'' = \frac{N'D - ND'}{D^2} = \frac{N'D}{D^2} = \frac{N'}{D}$$

ya que $N = 0$; además, $D > 0$. El signo de y'' es entonces el mismo que el de N'. Basta, pues, hallar la derivada del numerador. En el presente caso es

$$D = \sqrt{100 - x^2} = BC$$

que es esencialmente una cantidad positiva.

Paso primero:

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2}$$

Paso segundo:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 216 \quad ; \quad x = 6, \text{ raíz real.}$$

Paso tercero:

$$S'' = 2 + \frac{864}{x^2}$$

Paso cuarto:

$$S''(6) > 0.$$

Luego, para

$$x = 6 \quad \text{e} \quad y = 3$$

$$S(6) = 108, \text{ valor mínimo.}$$

EJEMPLO 3.º *Admitiendo que la resistencia a la flexión de una viga, con sección recta rectangular, es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura, ¿cuáles son las dimensiones de máxima resistencia de una viga que se puede sacar de un madero cilíndrico, de diámetro* d?

Sugerencia: Si x = anchura e y = altura, resulta que la resistencia de la viga viene dada por la función:

$$R = kxy^2 \qquad [1]$$

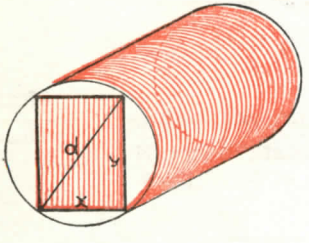


FIG. 56

De la figura 56 se deduce:

$$y^2 = d^2 - x^2; \qquad [2]$$

luego,

$$R = kx(d^2 - x^2).$$

Paso primero:

$$R' = (d^2 - 3x^2)k.$$

Paso segundo:

$$d^2 - 3x^2 = 0 \quad ; \quad \therefore \; x = \frac{d}{\sqrt{3}} \qquad [3]$$

que dará un máximo, como se comprueba con la derivada segunda.

De las expresiones [2] y [3] se tiene:

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d.$$

Luego se ve que:

$$y = x\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}\, x$$

Este es justamente el valor que emplean los obreros dedicados al trabajo de vigas.

Según vemos en estos ejemplos, lo primero es establecer, con las condiciones dadas, la función cuyos máximos y mínimos se piden. Esto algunas veces ofrece dificultad considerable. No existe regla aplicable en todos los casos, pero en muchos problemas pueden servir de guía las directrices marcadas en los siguientes ejemplos:

141. Directrices prácticas.

EJEMPLO 1.º *Construir una caja abierta de volumen máximo, con una lámina cuadrada de zinc cuyo lado es 0,80 m, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando la lámina por las rectas punteadas. ¿Cuál será la longitud del lado de los cuadrados cortados?* (fig. 57).

Solución: Sea x = lado del cuadradito = altura de la caja; luego $0{,}80 - 2x$ = lado del cuadrado del fondo de la caja; y el volumen es

$$V = (0{,}80 - 2x)^2 x$$

que es la función que debe adquirir el máximo al variar x.

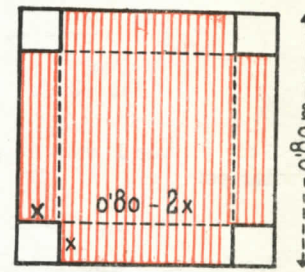


FIG. 57

Aplicando la regla del número 139:

Paso primero:

$$V' = (0{,}80 - 2x)^2 - 4x(0{,}80 - 2x) =$$
$$= (0{,}80 - 2x)\cdot(0{,}80 - 2x - 4x) =$$
$$= (0{,}80 - 2x)(0{,}80 - 6x)$$

Paso segundo:

$$0{,}80 - 2x = 0 \quad ; \quad 0{,}80 - 6x = 0.$$

Resolviendo resulta $x = 0{,}40$ y $x = 0{,}40/3$.

Es evidente que 0,40 debe dar un mínimo, ya que toda la lámina habría sido cortada, y el volumen sería nulo.

Paso tercero:

$$V'' = -2(0{,}80 - 6x) - 6(0{,}80 - 2x)$$

que para $x = 0{,}40/3$ vale:

$$V'' = -6(0{,}80 - 0{,}80/3) < 0.$$

Luego $x = 0{,}4/3$ da el volumen máximo $= 0{,}037925$ m^3 $= 37{,}925$ dm^3.

EJEMPLO 2.º *¿Cuál es la anchura del rectángulo de máxima área que puede inscribirse en un segmento OAA' dado (de altura 9) de una parábola cuya ecuación es* $y^2 = 16x$? (fig. 58).

Sugerencia: Si OC $= 9$, BC $= x$, y PP' $= 2y$, el área del rectángulo es, llamando (x, y), las coordenadas del punto P de la parábola:

$$S = 2(9 - x)y$$

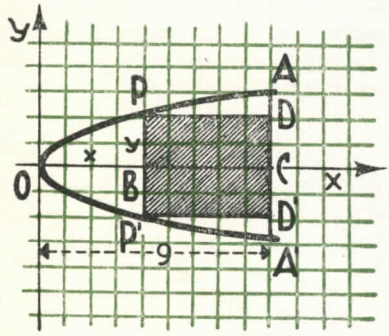


FIG. 58

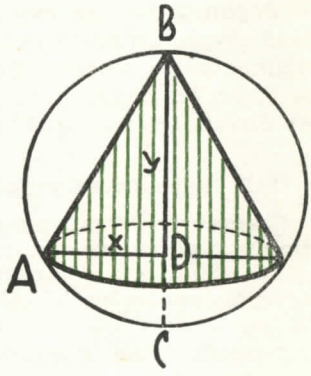


FIG. 59

Pero ya que P está en la parábola $y^2 = 16x$, la función que hay que estudiar es:

$$S = 2(9 - x)\sqrt{16x}$$

Respuesta: Anchura $= 2/3 \cdot 9 = 6$.

EJEMPLO 3.º *Hallar la altura de un cono de máximo volumen que puede inscribirse en una esfera de radio* r *dado* (fig. 59).

Sugerencia: Volumen del cono $= 1/3\pi x^2 y$. Pero en virtud del teorema de la altura, aplicado al triángulo rectángulo ABC, es:

$$x^2 = BD \cdot DC = y(2r - y)$$

luego la función que hay que estudiar es:

$$V = \frac{\pi}{3} y^2(2r - y)$$

Respuesta: Altura del cono $= 4/3$r.

EJEMPLO 4.º *Hallar la forma del mayor rectángulo que puede inscribirse en una circunferencia dada* (fig. 60), *de ecuación* $x^2 + y^2 = a^2$.

$$A = 4xy \qquad [4]$$

donde x e y se relacionan mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad [5]$$

Luego:

$$A = 4x\sqrt{a^2 - x^2} = 4\sqrt{a^2x^2 - x^4}$$

$$A' = 4 \cdot \frac{2a^2x - 4x^3}{2\sqrt{a^2x^2 - x^4}} = 4 \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{y}$$

$$a^2 - 2x^2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = y$$

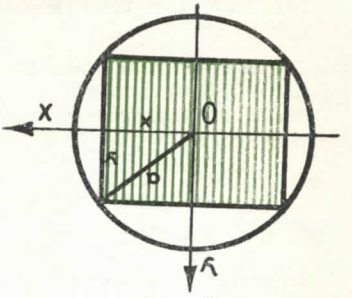


FIG. 60

Solución: Area del rectángulo:

Luego el rectángulo máximo es un *cuadrado.*

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 al 14, determina los máximos y mínimos relativos si los hay.

1. $y = 3 + 6x - x^2$
2. $y = 2x^2 + 4x + 3$
3. $y = (2x + 3)^2$
4. $y = -3(x - 2)^2$
5. $y = 2 + 12x - x^3$
6. $y = 1 - 6x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$
7. $y = x^3 - 6x^2 + 12x$
8. $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$
9. $a^2y = x^2(x^2 - 2a^2)$
10. $y = 1 - 4x + 2x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4}x^4$
11. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 4x$
12. $a^2y = x(a - x)^2$
13. $a^2y = x^4$
14. $a^5y = x^4(3a^2 - 2x^2)$
15. Determina a, b, c y d, de modo que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga puntos críticos en (0, 4) y (2, 0).
16. Haz que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga puntos críticos en (−3, 2) y (0, −1).
17. Haz que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase por (3, 0) y (0, 6) con un punto crítico en (2, 2).
18. Haz que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto crítico en (1, −2) y sea tangente a la recta $3x + y = 0$ en (0, 0).
19. Haz que la curva $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ pase por (2, −36) y tenga puntos críticos en (0, −4) y (1, 0).

20. Haz que la curva $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ pase por $(-1, 8)$, sea tangente a la recta $y = 11x - 5$ en el punto $(1, 6)$ y tenga un punto crítico en $(0, 3)$.

21. ¿Cuál es la condición para que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga dos puntos críticos?

Halla los máximos y mínimos relativos, si los hay, en las siguientes funciones:

22. $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

23. $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$

24. $y = (x + 2)^2(x - 1)^2$

25. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$

26. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

27. Halla dos números, cuya suma es 18, si el producto de uno por el cuadrado del otro ha de ser máximo.

28. Halla dos números, cuya suma es 24, si el producto de uno por el cubo del otro ha de ser máximo.

29. ¿Cuál será la forma rectangular de un campo de área dada igual a 36 dam^2 para que sea cercado por una valla de longitud mínima?

30. Se quiere cercar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado que está junto al camino cuesta 8 pesetas por metro, y para los otros lados 4 pesetas por metro, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 1.440 pesetas.

31. De todos los triángulos isósceles de 12 cm de perímetro, halla el de área máxima.

32. Halla un número tal que el exceso sobre su cuadrado sea máximo.

33. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden cada uno 10 centímetros. Halla la longitud de la base si el área es un máximo.

34. Halla la altura que debe tener un cilindro de revolución inscrito en una esfera que tiene de diámetro 6 m, para que su volumen sea máximo entre todos los inscritos en ella.

35. De todos los triángulos isósceles, cuya base y altura suman 20 cm, ¿qué base tiene el de área máxima?

36. Entre todos los rectángulos que tienen 48 cm de perímetro, ¿cuál es el de área máxima?

37. ¿Qué concentraciones molares, x e y, deben tener los iones H y OH en el agua, para que su suma sea un mínimo?
(Recuerda que $x \cdot y = k$, siendo k la constante de disociación del agua, y con ella halla el mínimo de la función $S = x + y$.)

38. Se sabe que para hacer un filtro de laboratorio se pliega un papel circular; siendo R el radio de dicho círculo, calcula la altura del cono cuando el volumen es máximo.

39. Halla sobre la recta $y = x$, un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $P_1(-a, 0)$, $P_2(a, 0)$, $P_3(0, b)$ sea mínima.

40. Demuestra que una tienda cónica, de capacidad dada, requiere la menor cantidad de lona cuando su altura es $\sqrt{2}$ veces el radio de la base. Y que, extendida sobre el suelo, es un sector circular de 207° 48′. ¿Cuánta lona se necesitaría para una tienda de 3 m de alta?

41. Halla las dimensiones del mayor rectángulo que puede inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

42. ¿Cuál es el punto de la curva $4y = x^2$ más próximo al punto (0, 4)?

43. De todos los cilindros cerrados que tengan igual volumen, determinar el radio y la altura del que tenga la menor superficie total. Sea 64 dm³ el volumen dado, y siendo *a)* abierto por arriba; *b)* cerrado.

44. Una hoja de papel para un cartel mide 2 m². Las márgenes superior e inferior miden 20 cm, y las laterales 12 cm. ¿Cuáles son las dimensiones, si la parte impresa es máxima?

45. A las nueve de la mañana el barco B está 65 millas al Este del barco A; B navega hacia el Oeste a 10 millas por hora, y A hacia el Sur a 15 millas por hora. ¿Cuándo estarán más próximos uno de otro y cuál es esa distancia?

46. El coste del aceite pesado para mover una locomotora es proporcional al cuadrado de la velocidad, y es de 2.000 pesetas por hora, a la velocidad de 40 km/h. Otros gastos importan 6.000 pesetas, independientemente de la velocidad. Halla la velocidad que hace mínimo el coste.

47. Halla las dimensiones del cono de revolución de volumen mínimo que puede ser circunscrito a una esfera de 8 cm de radio.

48. Un hombre se encuentra en una lancha en P, que dista 5 millas del punto A más próximo de una costa recta AB. Desea ir a B, que dista 6 millas de A, en el menor tiempo posible. ¿Qué dirección llevará, si puede navegar a 2 millas/hora, y andar a 4 millas/hora? (fig. 61).

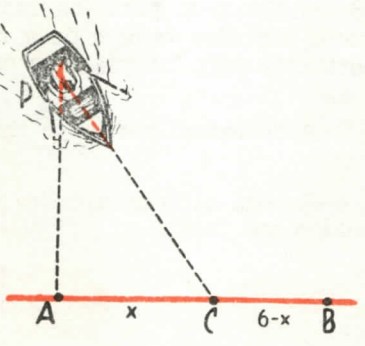


FIG. 61

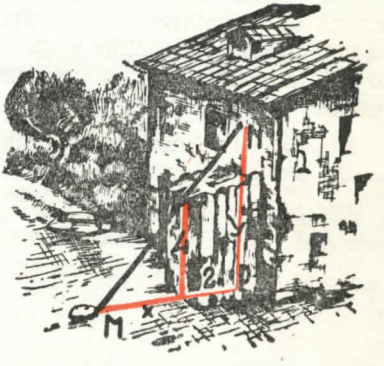


FIG. 62

49. Se desea apuntalar la pared PN de una casa mediante una viga MN que se apoya sobre una pared de 4 m de altura, que dista 2 m de la casa. Hallar la longitud L de la viga más corta que puede usarse (figura 62).

17

Trazado de curvas

142. Método a seguir para el trazado de curvas.—Estamos ya en condiciones de estudiar métodos más perfectos que los anteriormente considerados para trazar curvas.

En realidad, para construirlas exactamente tendríamos que determinar sus infinitos puntos. Siendo esto imposible, se calculan sólo los más importantes y las cualidades más características de la curva. El método a seguir puede ser el siguiente, que consiste en determinar:

1.º Simetrías.

2.º Intervalos o campos de existencia.

3.º Puntos en que la función se hace infinita.

4.º Valor de la función cuando $x \to \infty$.

5.º Puntos en que la curva corta a los ejes.

6.º Máximos y mínimos relativos.

7.º Puntos de inflexión.

8.º Cuadro de valores.

Varios de estos apartados han sido ya estudiados; consideraremos aquí solamente los restantes.

143. Intervalos o campos de existencia.—Están constituidos por el conjunto de valores de la variable independiente x, para los cuales está definida la función y. Son justamente aquellos valores de y que no son imaginarios. Los casos más importantes para los que y no está definida son los siguientes:

1.º Que la función tenga algún radical de índice par, cuyo radicando pueda adquirir valores negativos.

EJEMPLO.—La función $y = \sqrt{x+2}$ solamente está definida para los valores que hacen el radicando positivo o nulo, o sea, para:

$$x + 2 \geq 0$$

de donde:

$$x \geq -2$$

Por tanto, el intervalo de existencia de dicha función es $(-2, \infty)$.

2.º Que la función contenga alguna expresión logarítmica de la variable, en cuyo caso, para que el logaritmo sea real, la función que está bajo el signo logarítmico sólo puede recibir valores positivos.

EJEMPLO.—La función $y = L(x - 1)$ sólo está definida por los valores que hacen:

$$x - 1 > 0$$

o sea:

$$x > 1$$

Por tanto, el intervalo de existencia de esta función es $(1, \infty)$.

144. **Puntos en que la función se hace infinita: asíntotas paralelas a OY.**—Si $y \to \infty$ cuando $x \to a$, resulta que la curva representativa de la función se aproxima a la recta $x = a$ tanto como queramos, bastando para ello tomar x suficientemente próximo a a. La recta $x = a$ se denomina entonces *asíntota* de la curva, y es paralela al eje OY. Por tanto, *para hallar las asíntotas paralelas al eje* OY, *basta determinar los valores finitos de* x *que hacen a* y *infinito.*

La función se hace infinita, en muchos casos, porque algunos valores de x son raíces del denominador, sin serlo del numerador. Luego para hallarlos se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación que resulte. Las raíces que se obtengan no deben anular al numerador.

EJEMPLO 1.º *Hallar los puntos en que* $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1}$ *se hace infinita, determinando las asíntotas paralelas a* OY.

Haciendo $x^2 - 1 = 0$, se tiene $x = +1$ $y - 1$; estos son los puntos pedidos, ya que esas raíces no anulan al numerador.

Las asíntotas son $x = 1$, $x = -1$.

145. **Valor de la función para $x \to \infty$: asíntotas paralelas a OX.** Dicho valor se calcula por las reglas expuestas en la lección 9.ª Una vez conocido dicho límite, se traza una paralela al eje OX, a la distancia del origen igual al límite hallado. Esa paralela será una *asíntota* de la curva *paralela al eje* OX. La curva se aproximará indefinidamente a esta recta, sin llegar nunca a tocarla.

Para hallar las asíntotas paralelas al eje OX *se buscan los valores finitos de* y *que hacen a* x *infinito.*

Puede ocurrir que el límite de la función, al tender x a $\pm \infty$, sea también infinito; entonces no hay asíntotas paralelas a los ejes. En este caso las asíntotas son oblicuas.

EJEMPLO 1.º *Hallar el límite de la función:*

$$y = \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^3 + 2x - 3} \text{ para } x \to \infty.$$

indicando las asíntotas paralelas a OX.

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-5x+3} = \lim \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1/2$$

La asíntota paralela al eje OX es:

$$y = 1/2$$

EJEMPLO 2.º *Hallar las asíntotas de la curva:*

$$y = \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+2x+2}$$

Solución: Haciendo el denominador igual a cero:

$$2x^2+2x+2=0$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \text{imaginarias.}$$

No hay asíntotas paralelas a OY.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+2x+2} = \frac{3}{2}$$

Luego la asíntota paralela a OX es:

$$y = \frac{3}{2}$$

146. **Puntos de inflexión.**—*Puntos de inflexión de una curva son aquellos que separan un arco convexo de otro cóncavo. En ellos la tangente atraviesa la curva.*

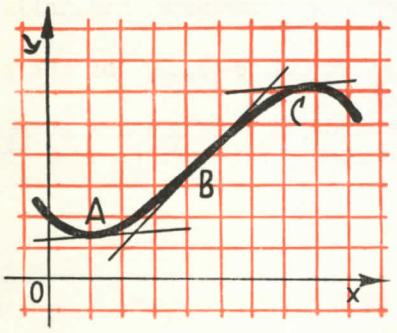


FIG. 63

En la figura 63, B es un punto de inflexión. Cuando el punto que describe la curva pasa por un punto de inflexión, la derivada segunda cambia de signo, y es continua; debe anularse en ese punto. Luego: **En los puntos de inflexión,**

$$f''(x) = 0 \qquad [1]$$

Si además es $f'''(x) \neq 0$, entonces podemos asegurar que B

es punto de inflexión, ya que en un entorno suficientemente pequeño del mismo, $f''(x)$ es una función creciente (o decreciente).

Ya que en un punto donde el arco de curva es convexo, como el A, aquél está sobre las tangentes, y en un punto donde el arco de curva es convexo como el C, aquél está debajo de las tangentes, en un punto de inflexión, como el B, la tangente atraviesa la curva.

147. **Regla para hallar puntos de inflexión de una curva cuya ecuación sea $y = f(x)$.**

Paso primero: Se halla $f''(x)$.

Paso segundo: Se hace $f''(x) = 0$ y se resuelve la ecuación resultante para hallar sus raíces reales.

Paso tercero: Se halla $f'''(x)$. Se sustituye en ésta las raíces reales de $f''(x)$. Si $f'''(x)$ no se anula, hay punto de inflexión. Si se anula, no sabemos.

Si $f'''(x)$ es difícil de hallar, o no existe, o se anula para las raíces de $f''(x)$, se da el:

Paso cuarto: Se calcula $f''(x)$ primero para un valor muy poco inferior, y luego para un valor muy poco superior a cada una de las raíces reales de $f''(x)$, y si ésta cambia de signo, hay punto de inflexión.

EJEMPLO. *Hallar los puntos de inflexión de la curva* $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ (figura 64).

Paso primero:

$$y'' = 36x^2 - 24x$$

Paso segundo:

$$36x^2 - 24x = 0$$

$$\therefore x = 2/3 \quad , \quad x = 0$$

Paso tercero:

$$y''' = 72x - 24$$

$f'''(x)$ no se anula para $x = 2/3$ ni $x = 0$. Luego ambas son abscisas de puntos de inflexión. Luego los puntos de inflexión son **A(0, 1)** y **B(2/3, 11/7)**.

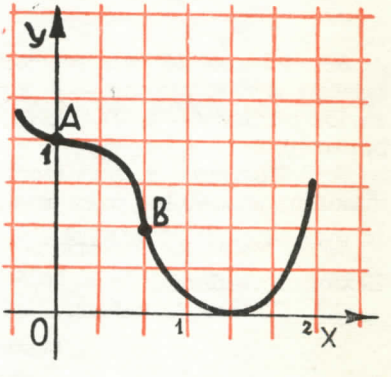


FIG. 64

1.º Para $x < 0$, $f''(x) > 0$; para $0 < x < 2/3$, $f''(x) < 0$. Luego la curva es cóncava a la izquierda y convexa a la derecha de $x = 0$.

2.º Para $0 < x < 2/3$, $f''(x) < 0$; para $x > 2/3$, $f''(x) > 0$. Luego la curva es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha de $x = 2/3$.

148. **Aplicación a la construcción de gráficas de funciones sencillas.** *Estudiar y construir la curva* $y = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1.º *Simetrías.*—La curva no es simétrica respecto de ninguno de los ejes coordenados, ni del origen (fig. 65).

2.º *Intervalos de existencia.*—La función y toma un valor real para cualquier valor real de la variable x. Luego el intervalo de existencia es $(-\infty, +\infty)$, por ser un polinomio.

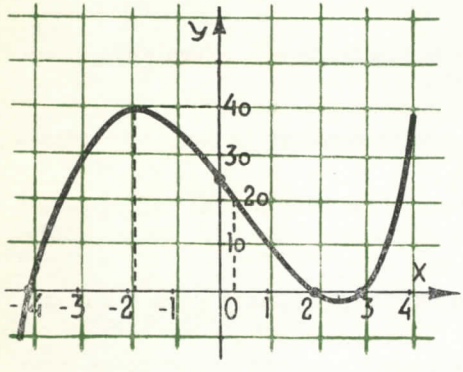


FIG. 65

3.º *Puntos en que la función se hace infinita.* — No hay ningún valor finito de x que haga la y infinita, por ser ésta una función racional y entera. Luego no hay asíntotas paralelas al eje OY.

4.º *Valor de la función cuando* $x \to \infty$.—Sacando $+x^3$ factor común, se tiene

$$y = +x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{14}{x^2} + \frac{24}{x^3}\right),$$

que cuando $x \to +\infty$, $y \to +\infty$; y cuando $x \to -\infty$, $y \to -\infty$. Luego no hay asíntotas paralelas al eje OY.

5.º *Puntos de intersección con los ejes.*—La función tiene tres raíces enteras, que son -4, 2 y 3. Luego la curva corta al eje de las x en los puntos $(-4, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$. Al eje de las y le corta en el punto $(0, 24)$.

6.º *Máximos y mínimos relativos.*—Para $x = -1{,}85$ tiene un máximo: $y = 40{,}15$; para $x = 2{,}52$ tiene un mínimo: $y = 1{,}63$.

7.º *Puntos de inflexión.*—Para $x = \frac{1}{3}$ tiene un punto de inflexión de ordenada $y = 20{,}74$.

8.º *Cuadro de valores.*

				Máximo		Inflex		Mínimo			
x	$-\infty$	-5	-4	$-1{,}85$	0	$\frac{1}{3}$	2	$2{,}52$	3	4	$+\infty$
y	$-\infty$	-56	0	$40{,}15$	24	$20{,}74$	0	$-1{,}63$	0	16	$+\infty$

149. Curva normal.—Vamos a aplicar el método expuesto en los anteriores números a una curva de singular importancia: la *curva normal.* Se llama así a la que tiene por ecuación:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2x^2} \qquad [3]$$

siendo h una constante.

a) *Simetrías.*—La curva es simétrica respecto al eje OY, ya que cambiando x en $-x$, el valor de y no cambia, ni en valor ni en signo.

b) *Puntos de intersección con el eje* OX.—La ecuación de la curva puede escribirse así:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{e^{h^2x^2}} \qquad [4]$$

cuyo segundo miembro no se anula más que para los valores que hacen el denominador infinito, o sea, para $x = \infty$. La curva, por tanto, *no corta a eje* OX a distancia finita.

c) *Puntos de intersección con el eje* OY.—Se obtienen haciendo $x = 0$, o sea:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

El único *punto de intersección con* OY es $\left(0, \frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)$.

d) *Asíntotas.*—No hay ningún valor finito de x que haga $y = \infty$; pero para $x = \infty$, $y \to 0$. Luego la recta $y = 0$, es decir, el eje OX, es *asíntota* de la curva.

e) *Máximos y mínimos.*—Hallemos las derivadas:

$$y' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \cdot (-2h^2x) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} x \cdot e^{-h^2x^2}$$

$$y'' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} [e^{-h^2x^2} + xe^{-h^2x^2}(-2h^2x)] = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}(2h^2x^2 - 1)$$

Igualando a cero la derivada primera:

$$-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot x \cdot e^{-h^2x^2} = 0, \text{ o sea, } x = 0$$

pues se vio que $e^{-h^2x^2} \neq 0$ para todo valor finito de x.

Haciendo $x = 0$ en y'', se obtiene $y'' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}$

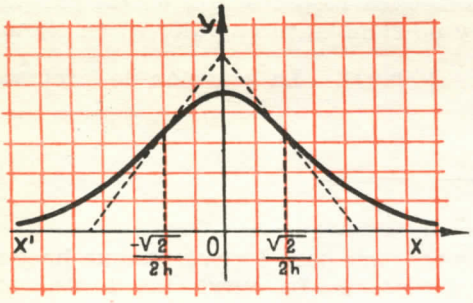


FIG. 66

Luego la curva tiene un *máximo* en el punto

$$\left(0, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)$$

f) *Puntos de inflexión.*— Igualando a cero la derivada segunda se obtiene:

$$2h^2x^2 - 1 = 0$$

o sea,

$$x^2 = \frac{1}{2h^2};$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2h}$$

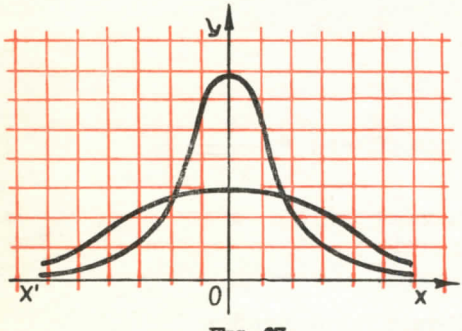


FIG. 67

Se deduce del anterior estudio que la forma de la curva normal es la indicada en la figura 66.

La figura 67 muestra que cuanto mayor es la constante h más elevada y esbelta es la curva.

EJERCICIOS

1. Dada $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$.
   a) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión.
   b) Los intervalos en que la función es creciente o decreciente.
2. Dada $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$:
   a) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión.
   b) Los intervalos en que la función es creciente o decreciente.
3. Demuestra que la curva $y = x^3 - 8$:
   a) No tiene ni máximos ni mínimos, pero sí un punto de inflexión.
   b) Que siempre es función creciente.
4. Localiza:
   a) Los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la curva $y = 2 + x^{2/3}$.
   b) Los intervalos en que es creciente o decreciente.

5. Dada la función $y = \dfrac{1}{x-2}$:

   a) Halla las asíntotas.
   b) Los máximos, mínimos y puntos de inflexión.
   c) Los intervalos en que la función es creciente o decreciente.

6. Examina la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la curva $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$.

7. Examina la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la curva $y = 3x + (x+2)^{3/5}$.

8. Halla las ecuaciones de las tangentes en los puntos de inflexión de la curva $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$.

9. Examina la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes curvas:

   a) $y = x^2$
   b) $y = 5 - 2x - x^2$
   c) $y = x^3$
   d) $y = x^4$
   e) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$.

10. Determina a, b, c, d, de modo que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en $(-2,6)$, con la tangente en dicho punto igual a $8x + y + 10 = 0$, y pase por $(0, -2)$.

11. Determina a, b, c, d, de modo que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase por $(-1, 1)$ y tenga un punto de inflexión con tangente horizontal en $(-2, 0)$.

12. Determina a, b, c, d, e, de modo que la curva $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tenga un punto crítico en $(0, 0)$, un punto de inflexión en $(1, 1)$ y pase por $(-1, 0)$.

13. Determina a, b, c, d, e, de modo que la curva $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tenga un punto crítico en $(1, 3)$ y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y = 2x$ en $(0, 0)$.

14. Determina los intervalos de existencia de:

   a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
   b) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-4}}$
   c) $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$
   d) $y = \sqrt{(x+3)(x-2)}$

15. Determina los intervalos de existencia de:

   a) $y = \log\,(2 - x)$
   b) $y = \log\,(x^2 + x - 6)$

16. Halla los puntos en que se hacen infinitas las siguientes funciones, indicando las asíntotas paralelas a OY:

   a) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$
   b) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \dfrac{1}{x \operatorname{sen} x}$

d) $y = \dfrac{3x}{\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}$

e) $y = 3x \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

f) $y = \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{3}{4} x}{1 + \operatorname{sen} x}$

17. Halla los puntos en que cortan al eje OX las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 5x + 3}$

b) $y = \dfrac{x^2 - 11x + 30}{x - 4}$

c) $y = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2x}$

d) $y = \dfrac{4x}{\operatorname{tg} \dfrac{x}{3}}$

18. Halla las asíntotas de:

a) $y = \dfrac{x^3}{(1 + x)^2}$

b) $y = \dfrac{x^4 - 6x + 1}{x^4 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3 + x}{x^5 - 1}$

d) $y = \dfrac{\mathrm{L}x}{x}$

e) $y = \mathrm{L}(x^2 - 3x + 2)$

f) $y^3 = ax^2 + x^3$

g) $y^2 = \dfrac{x^3}{x - 1}$

h) $(x + 1)y = (x - 1)x$

19. Construye la curva representada por las funciones:

a) $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^3 + 2$

b) $y = \dfrac{6x}{1 + x^2}$

c) $y = 12x - x^3$

d) $y^2 = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

e) $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x$

f) $y = x + \dfrac{1}{x}$

g) $y = e^{-x}$ (Curva de probabilidad).

18

Otras aplicaciones de las derivadas

I. DIFERENCIALES

150. Diferencial de una función.—Se llama *diferencial de una función* $y = f(x)$, y se representa por dy, *al producto de la derivada de dicha función por un incremento arbitrario dado a* x.

O sea,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \qquad [1]$$

151. Significado de dx.—Para hallar el significado de dx tengamos presente que la derivada de la variable x es 1.

Luego según la definición dada es:

$$dx = 1 \cdot \Delta x$$

O sea,

$$dx = \Delta x \qquad [2]$$

La diferencial de la variable independiente representa un incremento arbitrario dado a dicha variable.

152. Consecuencias.—Del teorema anterior se deducen las dos consecuencias siguientes:

1.ª La definición [1] puede escribirse:

$$dy = f'(x)\,dx \qquad [3]$$

2.ª Despejando $f'(x)$ en [3] queda:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

esto es, *una derivada es un verdadero cociente de los diferenciales de* y *y de* x.

153. Significado geométrico de dy. Representemos gráficamente la función $y = f(x)$; tracemos la tangente a la curva que resulta en uno de sus puntos, P (fig. 68). Demos un incremento a x, $\Delta x = MN$; el correspondiente incremento de la función es $\Delta y = QP'$.

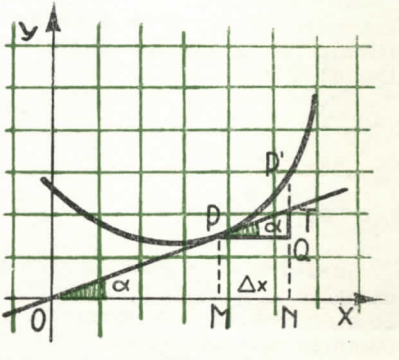


FIG. 68

Hallemos el valor del incremento de la ordenada de la tangente, esto es, de QT. Se tiene en el triángulo PQT:

$$\text{tg } \alpha = \frac{QT}{QP} = \frac{QT}{\Delta x}$$

Pero tg α representa la pendiente de la tangente, que sabemos es igual a $f'(x)$.

Luego:

$$f'(x) = \frac{QT}{\Delta x}$$

De donde:

$$QT = f'(x)\Delta x = dy$$

según la definición [1]. Por tanto: *la diferencial de una función en un punto dado representa el incremento que sufre la ordenada de la tangente geométrica al dar un incremento arbitrario a* x.

154. Aproximación de incrementos por medio de diferenciales.— Del número anterior se deduce que $\Delta y = QP'$ y $dy = QT$ son aproximadamente iguales cuando $dx = PQ$ es pequeño. Cuando sólo se desea un *valor aproximado* del incremento de la función, de ordinario es más fácil calcular el valor de la diferencial correspondiente y tomar este valor para Δy.

EJEMPLO 1.º *Hallar el volumen aproximado de una corteza esférica, de diámetro exterior 25 cm, y espesor 0,15 cm.*

Solución: El volumen V de una esfera de diámetro x es:

$$V = \frac{1}{6}\pi x^3 \qquad [4]$$

Evidentemente, el volumen *exacto* de la corteza es la diferencia ΔV entre los volúmenes de dos esferas con diámetros 25 cm y 24,7 cm, respectivamente. Ya que sólo se desea un valor aproximado de ΔV, hallamos dV. De [4] sale:

$$V' = \frac{1}{2}\pi x^2$$

Luego:

$$dV = \frac{1}{2}\pi x^2 dx$$

Sustituyendo $x = 25$, $dx = -0{,}3$, obtenemos $dV = 294{,}53$ cm³ aproximadamente, despreciando el signo, el cual sólo significa que V decrece cuando x decrece. El valor *exacto* es $\Delta V = 291$ cm³. Observa que la aproximación obtenida es buena, porque dx es *relativamente pequeño*, esto es, comparado con $x = 25$. De otra manera, el método carecería de valor.

EJEMPLO 2.º *Calcular* tg 46°, *aproximadamente por medio de diferenciales, sabiendo que* tg $45° = 1$, sec $45° = \sqrt{2}$, $1.º = 0{,}01745$ radianes.

Solución: Sea $y = \text{tg } x$. Luego:

$$dy = \sec^2 x dx \qquad [5]$$

Cuando x cambia de x a $x + dx$, y cambiará a $y + dy$, aproximadamente. Se sustituye en [5] $x = \frac{\pi}{4}(45°)$, $dx = 0{,}0175$. Entonces $dy = 0{,}0350$. Luego $y + dy = 1{,}0350 = \text{tg } 46°$, aproximadamente. (Las tablas con 4 cifras decimales dan tg $46° = 1{,}0355$.)

II. INTERPRETACION MECANICA DE LA DERIVADA

155. **Velocidad lineal.**—Sea el movimiento de un punto P sobre la línea AB (fig. 69). Sea s la distancia desde un punto fijo O al punto P, y sea t el tiempo correspondiente empleado. A cada valor de t corresponde una posición de P y, por tanto, un espacio s. Luego s será una función continua de t, y podemos escribir:

$$s = f(t) \ .$$

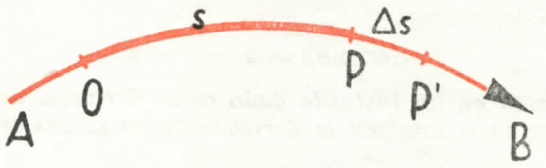


FIG. 69

Supongamos ahora que t recibe un incremento Δt; s recibirá entonces un incremento Δs, y será:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m \qquad [6]$$

o velocidad media de P cuando el punto se mueve de P a P′ durante el intervalo de tiempo Δt. Si P se mueve con movimiento uniforme (velocidad constante), la razón anterior tendrá el mismo valor para cualquier intervalo de tiempo, y es la velocidad en cualquier instante.

En el caso general de cualquier clase de movimiento, uniforme o no, definimos la *velocidad en un instante dado como el límite de la velocidad media* al tender Δt a cero; esto es:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

o sea,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

La velocidad en un instante dado es la derivada del espacio con respecto al tiempo.

Cuando v es positiva, el espacio s es una función creciente de t, y el punto P se mueve en el sentido AB. Cuando v es negativa, s es una función decreciente de t, y P se mueve en el sentido BA.

156. **Aceleración en el movimiento rectilíneo.**—Análogamente, si v es la velocidad del punto P al fin del tiempo t y si AB es una recta, de modo que la velocidad tenga una dirección constante, será:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \textit{aceleración media durante el intervalo } \Delta t.$$

y su límite:

$$\frac{dv}{dt} = \textit{aceleración en el instante } t.$$

Ya que $v = s'$, se tiene que la aceleración v' puede expresarse en la forma: s''. Luego:

$$\text{Aceleración} = a = v' = s''$$

La aceleración en un instante dado es la derivada de la velocidad respecto al tiempo, o también la derivada segunda del espacio respecto al tiempo.

EJEMPLO. *La ecuación del movimiento de un punto en m/s es:*

$$s = 12t - \frac{4}{9}t^3$$

Hallar: a) *Las expresiones de su velocidad y aceleración en cualquier instante;* b) *el instante en que el móvil se para;* c) *su aceleración en dicho instante.*

Solución: a) La velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo; luego

$$v = s' = 12 - 3 \cdot \frac{4}{9}t^2 = 12 - \frac{4}{3}t^2$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo; por tanto:

$$a = v' = -\frac{8}{3}t$$

b) Cuando el móvil se para, su velocidad es nula, o sea:

$$0 = 12 - \frac{4}{3} t^2$$

de donde

$$12 = \frac{4}{3} t^2 \quad ; \quad t^2 = 9 \quad ; \quad t = 3 \text{ s.}$$

El móvil se para a los 3 segundos.

c) La aceleración en dicho instante vale:

$$a = -\frac{8}{3} \cdot 3 = -8 \text{ m/s}^2$$

EJERCICIOS

Halla las diferenciales de las siguientes funciones:

1. $y = ax^2 + bx + c$
2. $y = x + \dfrac{2}{x}$
3. $y = \sqrt{ax + b}$
4. $y = \mathrm{L}(c \cdot u)$
5. $y = \operatorname{sen} 5x$
6. $y = \mathrm{L} \cos x$
7. $y = \dfrac{x + 3}{x^2 + 3}$
8. Halla dy en $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
9. Halla dy en $y^2 = a^2 \cos 2x$.
10. Halla $d[\operatorname{sen} (3x - 4x^3)]$.
11. Halla la velocidad y la aceleración: *a)* al fin de t segundos; *b)* al fin de 2 segundos; *c)* inicialmente ($t = 0$) en estos tres casos:

    1.º $s = 12 + 20t - 2t^2$

    2.º $s = t^3 - 2t^2 + 4$

    3.º $s = 10 \cos \dfrac{\pi}{3} t$

12. Halla la velocidad y la aceleración iniciales en el movimiento de ecuación:

$$s = t^4 + 3t + 4$$

13. Halla la velocidad y la aceleración iniciales cuando:

$$s = 8 \cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t$$

14. Si $s = 2t^5 + 3t^6 + 4t - 20$, hallar la posición, velocidad y aceleración iniciales y después de 10 segundos.
15. Análogamente si $s = \cos \dfrac{\pi}{4} t + 20 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} t$.

16. Un punto se mueve de modo que el espacio recorrido vale $s = 16 + 48t - -t^3$. ¿Cuándo y dónde se para?

17. ¿Cuándo y dónde se para un móvil cuyo movimiento tiene por fórmula $s = a \text{ sen } \pi t$?

18. Para un móvil, lanzado verticalmente hacia arriba, la ecuación del movimiento es:

$$s = 36t - 4{,}9\ t^2$$

Halla: *a)* las expresiones de la velocidad y de la aceleración en cualquier instante t; *b)* el instante en que la velocidad es nula; *c)* la máxima altura alcanzada.

19. Calcula Δy, dy, $\Delta y - dy$, dados $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$, $x = 2$, $dx = 0{,}5$.

20. Halla el cambio de volumen de un cubo, de arista x cm, por aumentar ésta en 1 por 100.

21. Mediante diferenciales, calcula sen 60° 1'.

22. ¿Para qué valores de x puede usarse $\sqrt[5]{x}$ en lugar de $\sqrt[5]{x+1}$, si el error debe ser menor que 0,001?

23. Halla la masa aproximada de un tubo de cobre de 2 m de largo; diámetro interior 4 cm; espesor 0,25 cm. Densidad del cobre $9\ \frac{g}{cm^3}$.

24. La ecuación de un movimiento, en km/h es $s = t^3 - 2t^2 - 3t + 10$. Halla la velocidad y la aceleración después de 3 horas.

25. El ángulo α en radianes, girado por una campana en t segundos, viene dado por la fórmula:

$$\alpha = 4t + \frac{2}{t}$$

Halla la expresión de su velocidad y cuándo ésta se anula.

19

Estudio analítico de la circunferencia

157. **Las cónicas.**—Las curvas que más frecuentemente se presentan en la práctica son las *cónicas:* circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, ya estudiadas anteriormente.

Por su particular interés, realizaremos en ésta y en las próximas lecciones un estudio analítico de dichas curvas.

158. **Ecuación de la circunferencia.**—La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano situados a una distancia constante de un punto fijo, llamado *centro.*

Para determinar su ecuación aplicaremos el método de los lugares geométricos (núm. 64).

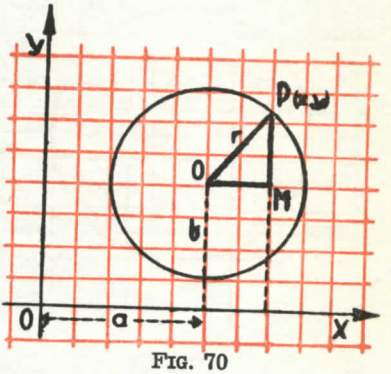


FIG. 70

Sea O(a, b) el centro, r, o *radio,* la distancia constante, y P(x, y) un punto cualquiera de la circunferencia. Se tendrá (fig. 70):

$$OP = r,$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

y elevando al cuadrado:

$$\mathbf{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2} \qquad [1]$$

que es la ecuación pedida.

Desarrollando los paréntesis se obtiene:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Y llamando:

$$\left.\begin{aligned} -2a &= m \\ -2b &= n \\ a^2+b^2-r^2 &= p \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

queda

$$\mathbf{x^2+y^2+mx+ny+p=0,} \qquad [3]$$

Toda ecuación de la forma [3] *representa una circunferencia.* Su centro y su radio se determinan despejando a, b y r entre las ecuaciones [2].

$$a = -\frac{m}{2} \quad ; \quad b = -\frac{n}{2} \quad ; \quad r^2 = a^2 + b^2 - p \qquad [4]$$

EJEMPLO 1.º *Hallar el centro y el radio de la circunferencia* $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$. *Trazarla* (figura 71).

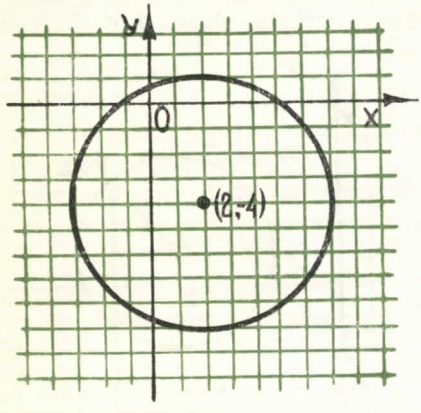


FIG. 71

Aplicando las fórmulas [4] resulta:

$$a = 4/2 \quad ; \quad b = -8/2$$
$$r^2 = a^2 + b^2 + 5$$

de donde:

$$a = 2, \; b = -4, \; r = 5$$

EJEMPLO 2.º *Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por centro* $(3, -4)$ *y* $r = 5$.

Por la fórmula [1] tenemos:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

o sea:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

que es la ecuación pedida.

159. Ecuación reducida de la circunferencia.—Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas, la ecuación [1] del número anterior se reduce a:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad [5]$$

que también puede obtenerse directamente, como se indica en la figura 72.

160. Ecuación general de segundo grado.—La ecuación más general de segundo grado en x e y se puede escribir en la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad [6]$$

Considerando ahora el caso especial en que $A = C$ y $B = 0$, esta fórmula se convierte en

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad [7]$$

Dividiendo por A, resulta:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Sustituyendo los valores $\frac{D}{A} = m$, $\frac{E}{A} = n$, $\frac{F}{A} = p$, tenemos:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \qquad [8]$$

que es del mismo tipo que la ecuación [3]. Luego

Una ecuación de segundo grado en que x^2 *e* y^2 *tiene coeficientes iguales y carece de término en* xy, *representa una circunferencia (excepcionalmente, un solo punto, o carece de gráfica); y recíprocamente.*

161. **Determinación de la circunferencia.**—En general, se necesitan tres puntos o tres condiciones para determinar la ecuación de una circunferencia, pues son tres los coeficientes que es preciso hallar, tanto en la forma [1] como en la forma [3].

EJEMPLO 1.º *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* $P_1(2, -2)$, $P_2(7, 3)$ *y* $P_3(6, 0)$ (fig. 73.

Método general: Sustituyamos las coordenadas de los puntos dados en la ecuación general [3] de la circunferencia, a quien deben satisfacer, y tendremos:

$$\begin{aligned} 8 + 2m - 2n + p &= 0 \\ 58 + 7m + 3n + p &= 0 \\ 36 + 6m \qquad\quad + p &= 0 \end{aligned}$$

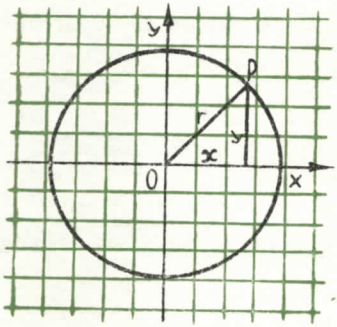


FIG. 72

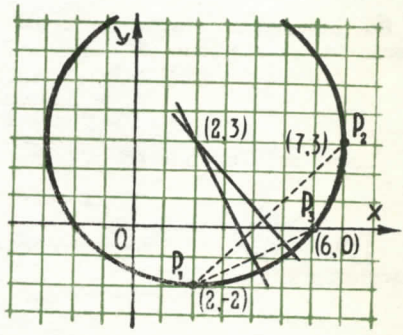


FIG. 73

Resuelto este sistema, da:

$$m = -4 \quad , \quad n = -6 \quad , \quad p = -12 \quad ,$$

que sustituidos en la fórmula [3], nos dan:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0.$$

Método especial: Este método tiene la ventaja de una interpretación

geométrica más directa, y es el siguiente: El centro está en la mediatriz de P_1P_2, cuya ecuación es:

$$(x-2)^2+(y+2)^2=(x-7)^2+(y-3)^2$$

o sea:

$$x+y-5=0 \quad ;$$

y también está en la mediatriz de P_1P_3, cuya ecuación es:

$$(x-2)^2+(y+2)^2=(x-6)^2+y^2$$

esto es:

$$2x+y=7\,.$$

El centro es, por tanto, el punto de intersección de estas dos rectas, que es (2, 3). El radio es la distancia de (2, 3) a uno cualquiera de los puntos dados, la cual vale 5. Según la fórmula [1], la ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

Evidentemente este método sólo necesita analíticamente la construcción geométrica elemental del centro.

EJEMPLO 2.º *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los dos puntos* (— 1, 0) *y* (2, 1), *y cuyo centro está en la recta* $y-2x+3=0$.

La mediatriz del segmento formado por los puntos (— 1, 0) y (2, 1), es:

$$(x+1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$

o sea:

$$3x+y-2=0.$$

Su intersección con la recta $y-2x+3=0$ dará el centro de la circunferencia: es el punto (1, — 1).

El radio será igual a la distancia de éste al punto (— 1, 0), o sea:

$$r=\sqrt{(1+1)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

Luego sustituyendo en la fórmula [1], tenemos la ecuación pedida:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=5$$

162. **Tangente a una circunferencia en uno de sus puntos.**—Sea la circunferencia:

$$x^2+y^2=r^2$$

y el punto $P(x_1, y_1)$ uno de sus puntos.

Derivando la ecuación [5]:

$$2x+2yy'=0$$

Luego:

$$y'=\frac{-x}{y} \quad ; \quad y'_1=\frac{-x_1}{y_1}$$

La tangente será:

$$y-y_1=\frac{-x_1}{y_1}(x-x_1)$$

o sea,

$$y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$$

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

ya que el punto (x_1, y_1) satisface la ecuación [5], por pertenecer a la circunferencia. Queda, por tanto:

$$x_1 x + y_1 y = r^2 \qquad [9]$$

Desde el punto de vista meramente formal, se observa que puesta la ecuación [5] en la forma:

$$x \cdot x + y \cdot y = r^2$$

para obtener la tangente basta sustituir una x por x_1 y una y por y_1.

163. **Tangentes a una circunferencia paralelas a una recta dada.** Procederemos como en el siguiente:

EJEMPLO.—*Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia*

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

paralelas a la recta

$$3x - y = 2$$

Solución: Hallemos las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia (fig. 74):

$$a = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$b = -\frac{4}{2} = -2$$

$$r^2 = 1 + 4 - 0 = 5$$

La ecuación de una recta paralela a la dada es:

$$3x - y + k = 0$$

Luego la ecuación de las tangentes será de esta forma.

Determinaremos la constante k mediante la condición de que la recta diste del centro una longitud igual a $\sqrt{5}$. O sea:

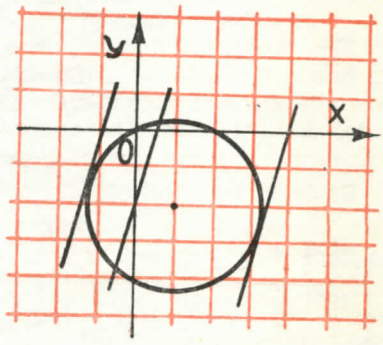


FIG. 74

$$\sqrt{5} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + k}{\pm\sqrt{9+1}} = \frac{5+k}{\sqrt{10}}$$

$$k = -5 \pm 5\sqrt{2}$$

Las tangentes serán:

$$3x - y - 5 \pm 5\sqrt{2} = 0$$

164. Tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.—Se procederá como se indica en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO.—*Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia* (figura 75)

$$x^2 + y^2 = 20$$

trazadas por el punto P(6, 2).

La ecuación de una recta que pasa por P es:

$$y - 2 = m(x - 6)$$

o sea:

$$mx - y - 6m + 2 = 0$$

Esta recta será tangente a la circunferencia si pasa a la distancia $2\sqrt{5}$ (radio) del centro. Por tanto, hallemos la distancia de la recta al centro, e igualemos esta distancia al radio:

$$\frac{-6m + 2}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2\sqrt{5}$$

o sea:

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

de donde

$$m = 2 \quad ; \quad m = -\frac{1}{2}$$

y las tangentes son:

$$2x - y = 10 \quad ; \quad x + 2y = 10$$

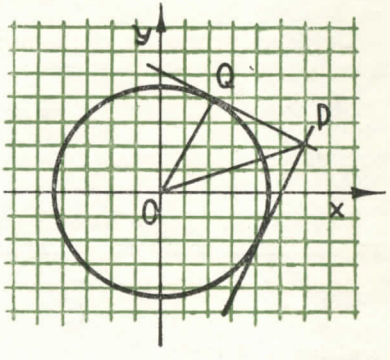


FIG. 75

165. Potencia de un punto respecto de una circunferencia.—Sea un punto P y una circunferencia C. Por definición, *potencia de P respecto de la circunferencia C es el producto de los dos segmentos orientados comprendidos entre aquél y ésta sobre cualquier recta secante a la circunferencia que pasa por el punto P.*

Es decir, llamando p a la potencia de P, y siendo PB una recta que pasa por el centro, se tiene (fig. 76):

$$p = PA \cdot PB =$$

$$= (d - r)(d + r) = d^2 - r^2 \quad [10]$$

Pero, en el triángulo rectángulo CHP, se tiene

$$d^2 = (x_o - a)^2 + (y_o - b)^2$$

Sustituyendo este valor de d^2 en la igualdad [10], resulta

$$p = (x_o - a)^2 + (y_o - b)^2 - r^2, \quad [11]$$

igualdad que dice:

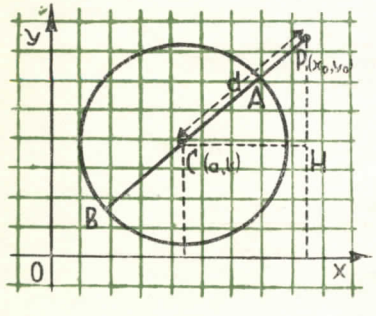


FIG. 76

La potencia de un punto respecto de una circunferencia se obtiene sustituyendo en el primer miembro de la ecuación [3], *de la circunferencia, las coordenadas generales por las particulares del punto dado.*

COROLARIO 1.—Si el punto dado P fuera el origen de coordenadas, la igualdad [11] se reduce a

$$p = a^2 + b^2 - r^2,$$

que comparada con la fórmula [2], nos dice: *el término independiente de la ecuación de la circunferencia es la potencia del origen respecto de la misma circunferencia.*

COROLARIO 2.—De la misma igualdad [10] también se deduce que si el punto P dado es exterior a la circunferencia, la potencia es positiva; si es interior a ella, la potencia es negativa, y si está en la circunferencia, la potencia es nula.

166. **Eje radical y centro radical.**—Si un punto $\mathbf{P}(x, y)$ tiene igual potencia respecto de dos circunferencias dadas, de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$
$$x^2 + y^2 + m'x + n'y + p' = 0,$$

en virtud de la fórmula [11] podremos escribir que

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = x^2 + y^2 + m'x + n'y + p',$$

o pasando todo a un solo miembro, obtenemos

$$(m - m')x + (n - n')y + p - p' = 0, \qquad [12]$$

resultando igual al que hubiéramos obtenido restando las ecuaciones de las circunferencias.

La recta [12] obtenida se llama *eje radical* de las dos circunferencias. Su ecuación resulta restando las ecuaciones de ambas, suponiendo que los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales en las dos ecuaciones.

Luego, *el eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos de un plano que tienen igual potencia respecto de las dos circunferencias.*

De donde: *El eje radical de dos circunferencias secantes es su cuerda común; el de dos circunferencias tangentes, es la tangente en el punto de contacto.* Pues todo punto común a las dos circunferencias tiene una potencia nula respecto a cada una de ellas.

Centro radical de tres circunferencias es el punto de concurso de los tres ejes radicales que resultan de tomar dos a dos las tres circunferencias. Tiene igual potencia respecto a las tres.

EJEMPLO 1.º *Hallar la potencia del punto* (2, 1) *respecto de la circunferencia*

$$3x^2 + 3y^2 - 5x + 2y - 3 = 0$$

Solución: Reduciendo la ecuación a la forma [8], resulta:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$$

Luego la potencia del punto (2, 1) es:

$$2^2 + 1^2 - \frac{5}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 1 - 1 = \frac{4}{3} \ .$$

EJEMPLO 2.º *Hallar los ejes radicales de las tres circunferencias siguientes, tomadas dos a dos, y también el centro radical de las mismas.*

$$2x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \ ; \qquad [13]$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \ ; \qquad [14]$$

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1 = 0 \ . \qquad [15]$$

El eje radical de [13] y [14] es:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2} \right) - (x^2 + y^2 - 2x + 4y) = 0 \ ;$$

o sea:

$$2x - 4y - \frac{3}{2} = 0 \quad ; \quad \mathbf{4x - 8y - 3 = 0} \qquad [16]$$

Análogamente, el eje radical de [13] y [15] es:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2} \right) - (x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1) = 0$$

o sea:

$$3x + 5y - \frac{1}{2} = 0 \quad ; \quad \mathbf{6x + 10y + 1 = 0} \qquad [17]$$

y el de [14] y [15]:

$$\mathbf{5x + y - 1 = 0.} \qquad [18]$$

El centro radical, que es el punto de intersección de dos cualesquiera de los ejes radicales, por ejemplo [16] y [17], es $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$ y las coordenadas de este punto satisfacen a [18].

EJERCICIOS

Escribe las ecuaciones de las circunferencias siguientes:

1. De centro $(3, -5)$ y radio 4.
2. De centro $(-3, 4)$ y radio 5.
3. De centro $(0, b)$ y radio b.
4. De centro $(2, 3)$ y que pasa por $(3, -2)$.
5. De centro $(-1, -5)$ y tangente al eje OX.
6. De centro $(5, -2)$ pasando por $(4, 3)$.
7. De centro $(3, -5)$ y tangente a la recta $x - 7y + 2 = 0$.
8. De centro $(-1, 2)$ y tangente a la recta $4x - y = 5$.
9. Halla el centro y el radio de las siguientes circunferencias mediante las identidades [2] del texto:
   a) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$.
   b) $3x^2 + 3y^2 - 10x - 24y = 0$.
   c) $x^2 + y^2 - 8x = 0$.
10. Halla el centro y el radio de las siguientes circunferencias, completando cuadrados.
    a) $x^2 + y^2 - 3y = 0$.
    b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 5 = 0$.
    c) $7x^2 + 7y^2 - 4x - y - 3 = 0$.

Halla las ecuaciones de las circunferencias siguientes:

11. Que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(5, 1)$, $(2, -3)$.
12. Circunscrita al triángulo cuyos vértices son $(4, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 6)$.
13. Que pasa por los puntos $(0, 2)$, $(-1, 1)$ y tiene su centro en la recta $2x + 3y = 0$.
14. Que pasa por los puntos $(-2, 4)$, $(-1, 3)$ y tiene su centro en la recta $2x - 3y + 2 = 0$.
15. Una circunferencia tiene por extremos de uno de sus diámetros los puntos $(1, 1)$, $(5, -1)$. Halla su ecuación.
16. Halla el lugar de los centros de las circunferencias que pasan por $(2, 5)$ y son tangentes a la recta $x + 2 = 0$.
17. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo determinado por las rectas:
    L_1 : $2x - 3y + 21 = 0$.
    L_2 : $3x - 2y - 6 = 0$.
    L_3 : $2x + 3y + 9 = 0$.
18. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos vértices son A(0, 6), B(8, 6), C(0, 0).

19. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-2, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$.

20. Halla el lugar del vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos (o, b) y (a, b).

21. Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y - 16 = 0$ en el punto $(4, 1)$ y cuyo radio es igual a 5.

22. Halla las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los puntos A(1, 2), B(3, 4) y tangentes a la recta $3x + y - 3 = 0$.

23. Halla las ecuaciones de las dos circunferencias tangentes a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $4x + 3y - 7 = 0$, y que pasan por el punto $(2, 3)$.

24. Escribe la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x + y + 4 = 0$ y $7x - y + 4 = 0$, y que tiene su centro en la recta $4x + 3y - 2 = 0$. Halla las tangentes a las siguientes circunferencias por el punto exterior dado:

25. $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$, por $(7, 5)$.

26. $x^2 + y^2 = 10$, por $(5, 5)$.

27. $x^2 + y^2 = 2$, por $(6, 4)$.

28. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$, por $(4, 2)$.

Halla las tangentes a las circunferencias siguientes con la condición que se da:

29. $x^2 + y^2 = 17$, paralela a la recta $4x - y - 5 = 0$.

30. $x^2 + y^2 = 29$, paralela a la recta $2x + 5y = 2$.

31. $2x^2 + 2y^2 = 1$, perpendicular a la recta $x + 2y = 5$.

32. $x^2 + y^2 + 10x - 6y = 2$, paralelas a la recta $2x - y = 0$.

33. $2x^2 + 2y^2 = y$, perpendiculares a la recta $3x + 3y = 0$.

34. Demuestra que la recta $2y = x + 10$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$.

35. Halla la ecuación de la circunferencia con centro en $(1, 7)$, y tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

36. Halla las tangentes a las circunferencias siguientes en el punto dado:

a) $x^2 + y^2 = 26$, en $(-1, 5)$.

b) $2x^2 + 2y^2 = 5x$, en $(2, -1)$.

c) $3x^2 + 3y^2 + 2x + 5y = 0$, en $(0, 0)$.

Halla la ecuación de las circunferencias determinadas:

37. Por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 = 5$, y por $(2, -2)$.

38. Por las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, y la recta $2x - 3y = 5$, y por el punto $(6, 2)$.

39. Por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$, y $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$, y:

a) cuyo centro está en el eje de las x ;

b) cuyo centro está en el eje de las y.

40. Halla la ecuación de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, $x^2 + y^2 = 9$. Halla la longitud de la cuerda.

41. Halla la ecuación de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$, $2x^2 + 2y^2 = x$. Halla la longitud de la cuerda.

42. Halla los ejes radicales de las circunferencias siguientes, tomadas dos a dos; y también su centro radical:

$$x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0 \ , \ x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0 \ , \ 2x^2 + 2y^2 - 5 = 0.$$

43. Halla el centro radical de las circunferencias $x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$. Traza la figura.

44. Halla la potencia del punto P en los casos siguientes:

1.º P(3, 0), C : $x^2 + (y + 2)^2 = 10$.

2.º P(7, 2), C : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

3.º P(5, 2), C : $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

4.º P(b, c), C : $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

En los cuatro ejercicios anteriores la letra C indica la circunferencia.

45. Halla la potencia del punto (1, 2) respecto de la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 2x + 5y + 2 = 0$. Di si el punto (1, 2) es interior o exterior. Halla también la potencia del origen.

20

La elipse

167. **Definiciones.**—Elipse *es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos* F *y* F′, *llamados* focos, *es constante* (fig. 77).

Las longitudes de los segmentos PF y PF′ determinados por cada punto P de la elipse y los focos se llaman *radios vectores* del punto, cuya suma se designa por $2a$. De modo que

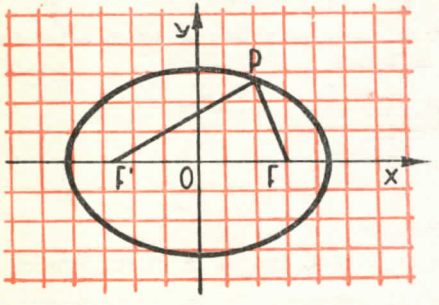


Fig. 77

$$F'P + FP = 2a \qquad [1]$$

Supongamos que el eje OX pasa por los focos y que el origen está en el punto medio de su distancia.

La medida del segmento FF′ en valor absoluto, se llama *distancia focal* de la elipse, y se designa por $2c$. Los números a y c son reales y positivos.

En el triángulo F′PF será $F'F < F'P + PF$, o sea, $2c < 2a$, y $c < a$. A la diferencia $a^2 - c^2$ se representa por b^2, o sea

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad [2]$$

El cociente

$$e = \frac{c}{a} \qquad [3]$$

se llama *excentricidad* de la elipse, y evidentemente es menor que la unidad.

168. **Fórmula de los radios vectores.**—Los puntos F y F′ tienen de coordenadas $(\pm c, o)$. El punto P es un punto cualquiera de la elipse, por tanto de coordenadas genéricas (x, y). Calculando los valores de F′P y FP, según el número 55, y sustituyendo en la fórmula [1], se tiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c^2) + y^2} = 2a \qquad [4]$$

Aislando el primer radical y elevando al cuadrado, se obtiene

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

o sea reduciendo términos

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Trasponiendo términos y dividiendo por $4a$:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

esto es,

$$\mathbf{FP = ex - a = r} \qquad [5]$$

Análogamente, aislando en la fórmula [4] el segundo radical, y repitiendo las mismas operaciones, obtenemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

o sea,

$$\mathbf{F'P = ex + a = r'} \qquad [6]$$

Las fórmulas [5] *y* [6] *permiten obtener fácilmente las longitudes de los radios vectores.*

169. **Ecuación de la elipse.**—De cualquiera de las fórmulas [5] o [6] se puede obtener también la ecuación reducida de la elipse. Tomando, por ejemplo, la anterior a la fórmula [5] y elevando al cuadrado, deducimos:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

Trasponiendo y sacando factores comunes, queda:

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

o sea

$$x^2\frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \ ;$$

$$x^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

De donde, dividiendo por b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad [7]$$

que es la *ecuación reducida*, o *ecuación canónica* de la elipse.

170. **Vértices de la elipse.**—Son los puntos en que los ejes cortan a la curva.

Si en la fórmula [7] hacemos $x = 0$, sale $y = \pm b$. Haciendo $y = 0$, se obtiene $x = \pm a$. Luego en el eje OY hay dos vértices: los puntos B(0, b) y B′(0, $-b$); y en el eje OX hay otros dos: los puntos A(a, 0) y A′($-a$, 0).

El segmento A′A, que es igual a $2a$, se llama *eje mayor* de la elipse; y el segmento B′B, igual a $2b$, se denomina *eje menor*.

Fácilmente se ve en la figura 78 que BF + BF′ = $2a$, y por tanto BF = $BF' = a$, y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BOF, sale la misma relación [2]:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

EJEMPLO.—*En la elipse* $x^2 + 3y^2 = 9$ (fig. 78), *determinar los ejes, la distancia focal y la excentricidad.*

Solución: Dividiendo la ecuación dada por 9, queda

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$$

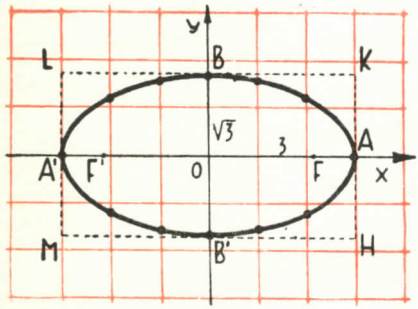


FIG. 78

que es de la forma [7]. Luego:

$$a^2 = 9 \;\; ; \;\; a = 3$$

$$b^2 = 3 \;\; ; \;\; b = \sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$$

Por tanto, los ejes son: $2a = 6$

$$2b = 2\sqrt{3}$$

la distancia focal: $2c = 2\sqrt{6}$

y la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

171. **Intervalos de existencia.**—Resolviendo la fórmula [7] primero respecto a y, se obtiene:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad ; \quad \frac{y}{b} = \frac{\pm\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

o sea:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad [8]$$

Para que el valor de y sea real es necesario que:

$$a^2 - x^2 \geqq 0 \quad ; \quad \text{o sea} \quad x^2 - a^2 \leqslant 0$$

Esta inecuación puede escribirse:

$$(x - a) \cdot (x + a) \leqslant 0$$

y se satisface por los valores de x

$$-a \leqslant x \leqslant a$$

que nos dice que x no puede recibir valores absolutos mayores que a.

Despejando x en la fórmula [7], se deduce del mismo modo

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad [8']$$

de donde,

$$-b \leqslant y \leqslant b$$

que nos dice que y no puede tomar valores absolutos mayores que b. Luego si se construye el rectángulo HKLM (fig. 78), con O como centro y de lados $2a$ y $2b$, la elipse quedará completamente comprendida dentro del mismo. Los intervalos de existencia son $(-a, a)$ para la x, y $(-b, b)$ para la y, ya que se verifica que

$$-a \leqq x \leqq a$$

$$-b \leqq y \leqq b$$

172. **Tangente a la elipse en uno de sus puntos.**—Sea la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad [9]$$

a la que queremos trazar la tangente en uno de sus puntos de coordenadas (x_1, y_1).

Derivando [9]:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

esto es:

$$y' = \frac{-x \cdot b^2}{y \cdot a^2} \quad ; \quad y'_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

La tangente será:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

y trasponiendo el factor b^2 y el divisor y_1:

$$\frac{y_1 y - y_1^2}{b^2} = -\frac{x_1 x - x_1^2}{a^2} \; ;$$

o sea:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ya que el punto (x_1, y_1) pertenece a la elipse.

La tangente es, pues:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \qquad [10]$$

cumpliéndose la misma regla formal que para la circunferencia.

173. **Propiedad de la tangente.**—*La tangente en un punto de la elipse es la bisectriz del ángulo formado por un radio vector y la prolongación del otro* (fig. 79).

La intersección T de la tangente en un punto $P(x_1, y_1)$ con el eje de las x se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación [10], con lo cual resulta:

$$\frac{x_1 x}{a^2} = 1 \quad ; \quad \text{de donde} \quad x = \frac{a^2}{x_1}$$

Sus distancias a los focos son:

$$TF = \frac{a^2}{x_1} - c \qquad TF' = \frac{a^2}{x_1} + c$$

Dividiendo resulta:

$$\frac{TF}{TF'} = \frac{a^2 - cx_1}{a^2 + cx_1} = \frac{a - ex_1}{a + ex_1} = \frac{r}{r'}$$

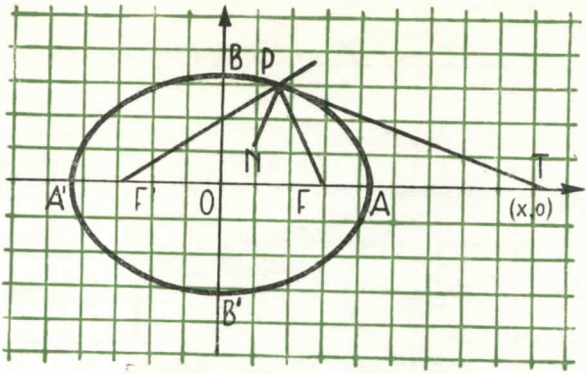


FIG. 79

Es decir, las distancias TF y TF′ son proporcionales a los lados del triángulo PFF′; por tanto, la tangente coincide con la bisectriz exterior, *c.q.d.*

La *normal* PN, por ser perpendicular a la tangente, coincidirá con la bisectriz interior, o sea con *la bisectriz del ángulo formado por los dos radios vectores.*

174. **Otras formas típicas de la ecuación de la elipse.**—La ecuación [7] expresa una propiedad geométrica característica de la elipse, independientemente de su posición respecto de los ejes coordenados. Dada una elipse de centro de simetría O, focos F y F′ y ejes A′A y B′B (figura 80), tracemos desde P una perpendicular PH al eje focal. En virtud de la fórmula [7] se tiene:

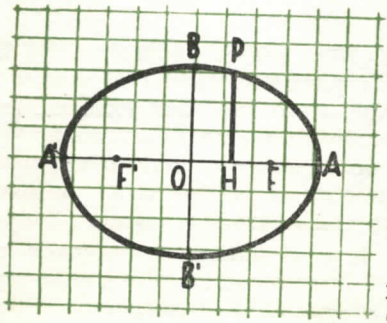


FIG. 80

$$\frac{\overline{OH^2}}{\overline{OA^2}} + \frac{\overline{PH^2}}{\overline{OB^2}} = 1 \; ; \qquad [11]$$

ecuación que se expresa así:

El cuadrado de la distancia de un punto de la elipse al eje menor partido por el cuadrado del semieje focal, más el cuadrado de la distancia del

mismo punto al eje focal, partido por el cuadrado del semieje no focal, es igual a 1.

La fórmula [11] permite deducir fácilmente que:

La ecuación de una elipse con centro en (α, β) *es, si el eje mayor es paralelo al eje* OX (fig. 81):

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad (a > b) \qquad [12]$$

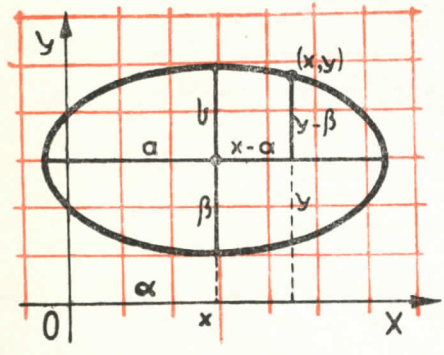


FIG. 81

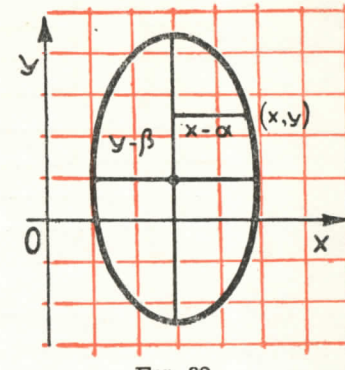


FIG. 82

y si el eje mayor es paralelo al eje OY (fig. 82):

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad (a > b) \qquad [13]$$

175. **Ecuación general de la elipse.**—Dada una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C tienen el *mismo signo*, es fácil ver que completando los cuadrados en x e y, la ecuación puede, en general, reducirse a una de las formas típicas del número anterior. Pero hay dos excepciones: cuando el primer miembro puede ponerse en forma de suma de dos cuadrados y al mismo tiempo el segundo miembro es nulo o *negativo*. En el primer caso el lugar es evidentemente el punto (α, β), llamado "punto elipse"; en el segundo caso, no existe gráfica. Luego:

Una ecuación de segundo grado en la cual falta el término en xy, *y los coeficientes de* x^2 *e* y^2 *tienen el mismo signo, representa una elipse con los ejes paralelos a los ejes coordenados (excepcionalmente un solo punto, o no existe gráfica).*

EJEMPLO 1.º *Hallar el centro, los semiejes y la excentricidad de la elipse*

$$4x^2 + 6y^2 + 4x - 12y - 1 = 0.$$

Trasponiendo la constante y completando los cuadrados, se obtiene:

$$4(x^2 + x) + 6(y^2 - 2y) = 1 ,$$

$$4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) + 6(y^2 - 2y + 1) = 1 + 7 ;$$

esto es:

$$4\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 6(y - 1)^2 = 8 ;$$

o sea:

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2}{2} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{4}{3}} = 1.$$

Luego el centro es $\left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$ y los ejes mayor y menor son, respectivamente, $2\sqrt{2}$ y $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

La excentricidad es igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

EJEMPLO 2.º *Hallar la ecuación de una elipse cuya excentricidad es igual a* $\frac{1}{3}$ *y cuyos focos se hallan en los puntos* $(-1, 4)$, $(7, 4)$.

Ya que el centro es el punto medio de la distancia entre los focos, el centro es el punto (3, 4). El eje mayor de la elipse es paralelo a OX, ya que pasa por los focos. Y como cada foco está a una distancia ae del centro

$$ae = 4 ;$$

pero $e = \frac{1}{3}$, luego $a = 12$.

De donde:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) = 128.$$

La ecuación de la elipse es, pues,

$$\frac{(x - 3)^2}{144} + \frac{(y - 4)^2}{128} = 1 ,$$

o después de reducir

$$8x^2 + 9y^2 - 48x - 72y - 936 = 0.$$

EJERCICIOS

1. Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de las siguientes elipses:

   a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *c)* $3x^2 + 5y^2 = 15.$

   b) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1.$ *d)* $4x^2 + 2y^2 = 9.$

Halla las ecuaciones de las siguientes elipses en la forma reducida:

2. Eje mayor, 9; distancia entre los focos, 8.

3. Eje menor, 4; distancia entre los focos, $4\sqrt{2}$.

4. Excentricidad $\dfrac{1}{2}$; distancia entre los focos, 1.

5. Distancia entre los focos, $8\sqrt{6}$; área del rectángulo construido sobre los ejes, 80.

6. Excentricidad $\dfrac{2}{3}$; semidistancia focal $\dfrac{2}{3}$

7. Pasa por (4, 3) y (6, 2).

8. Pasa por (1, 2) y (3, 1).

9. Un punto se mueve de modo que la suma de sus distancias a (6, 0) y (— 6, 0) es 16. Halla la ecuación de la curva que describe.

10. Un punto se mueve de modo que la suma de sus distancias a los puntos (0, 2) y (0, — 2) es 8. Halla la ecuación de la curva descrita y trázala.

11. Halla la tangente a las elipses dadas en el punto dado:
    a) $3x^2 + 4y^2 = 16$, en (2, — 1);
    b) $x^2 + 6y^2 = 100$, en (— 2, 4).

12. Halla la ecuación de la tangente y de la normal de:
    a) $x^2 + 2y^2 = 3$, en (1,— 1);
    b) $4x^2 + y^2 = 8$, en (1, 2).

13. Halla las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 100$, paralelas a la recta $3x + 8y = 7$.

14. Halla las ecuaciones de las tangentes a la elipse $5x^2 + y^2 = 5$, que pasen por el punto (— 2, — 1).

15. Halla las ecuaciones de la tangente y de la normal para el punto (— 1, 3) de la elipse $9x^2 + y^2 = 18$.

16. Demuestra que las tangentes de pendiente dada, m, a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ tienen la forma $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

17. Un punto se mueve de modo que su distancia al punto (4, 0) es siempre la mitad de su distancia a la recta $x - 16 = 0$. Halla la ecuación del lugar.

18. Un segmento AB, de 12 unidades de longitud, tiene un punto P que dista 8 unidades del extremo A. Este segmento se mueve apoyando sus extremos A y B en los ejes OY y OX. Halla la ecuación del lugar del punto P.

19. Dadas las elipses:

a) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

b) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

halla sus centros, semiejes, vértices y focos.

20. En una elipse, $2a = 150\ m$, $b = 45\ m$. Se pide hallar la ordenada para una abscisa $x = 25\ m$.

21. Halla la ecuación de la elipse cuyo centro es (1, 2), el foco (6, 2), y que pasa por el punto (4, 6).

22. Halla la ecuación de la elipse con centro en (— 1, — 1), vértice (5, 1), $e = \frac{2}{3}$.

23. Determina el lugar de un punto P(x, y) de modo que el producto de las pendientes de las rectas que unen P(x, y) con (3, — 2) y (— 2, 1), es — 6.

24. Determina el lugar de los puntos que dividen a las ordenadas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en la razón $\frac{3}{5}$.

25. Halla la ecuación de la elipse que pasa por (— 6, 4), (— 8, 1), (2, — 4) y (8, — 3) y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados.

26. Halla la ecuación del lugar del centro de la circunferencia tangente a las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$.

27. Halla las ecuaciones de los radios vectores del punto (2, 3) situado en la elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$.

28. Determina la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 4)$ y que pasa por $\left(\frac{12}{5}, 3\right)$.

21

La hipérbola

176. **Definiciones.**—Hipérbola *es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados* focos *es constante* (fig. 83).

Las longitudes de los segmentos PF y PF′ determinados por cada punto P de la hipérbola y los focos se llaman *radios vectores* del punto, cuya diferencia se designa por $2a$. De modo que

$$F'P - FP = 2a \qquad [1]$$

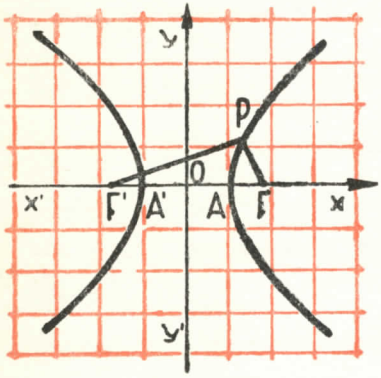


Fig. 83

Suponemos que el eje OX pasa por los focos y que el origen de coordenadas está en el punto medio de su distancia.

La medida del segmento FF′ en valor absoluto, se llama *distancia focal* de la hipérbola y se designa por $2c$. Los números a y c son reales y positivos.

Según se ve en el triángulo F′PF, es $F'F > F'P - FP = 2a$, o sea $2c > 2a$, y $c > a$. A la diferencia $c^2 - a^2$ se denomina b^2, o sea

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad [2]$$

El cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

se llama *excentricidad,* y evidentemente es mayor que la unidad.

177. **Fórmula de los radios vectores.**—Los puntos F y F′ tienen por coordenadas $(\pm c, 0)$ y el punto P es uno cualquiera de la curva, por tanto de coordenadas genéricas (x, y); calculando las distancias F′P y FP, según el número 55, y sustituyendo en la fórmula [1], se tiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad [3]$$

Aislando el primer radical y elevando al cuadrado, obtenemos:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

y reduciendo términos:

$$2cx = 4a^2 - 2cx + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

o sea, dividiendo por $4a$

$$\frac{c}{a}x - a = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \text{FP} \qquad [4]$$

Por tanto:

$$\text{FP} = \text{ex} - \text{a} = \text{r} \qquad [5]$$

Análogamente, aislando el segundo radical en la fórmula [3] y efectuando las mismas operaciones, resulta:

$$\text{F'P} = \text{ex} + \text{a} = \text{r'} \qquad [6]$$

Las relaciones [5] y [6] nos dan *la longitud de los radios vectores.*

178. **Ecuación de la hipérbola.**—Elevando al cuadrado la igualdad [4], se deduce:

$$\frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2 - 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + y^2$$

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2 = b^2$$

o sea:

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2 \quad ; \quad \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = b^2$$

y dividiendo por b^2

$$\frac{\text{x}_1\text{x}}{\text{a}^2} + \frac{\text{y}_1\text{y}}{\text{b}^2} = 1 \qquad [7]$$

que es la *ecuación reducida* o *canónica* de la hipérbola.

179. **Vértices de la hipérbola.**—Si ponemos $y = 0$ en la fórmula [7], obtenemos $x = \pm a$. La curva corta, pues, al eje OX en dos pun-

tos A y A′ que son sus vértices. Si en la fórmula [7] hacemos $x = 0$, y es imaginaria: la curva no corta, pues, al eje OY. El segmento AA′ se llama *eje real*, y el segmento BB′ *eje imaginario* de la hipérbola, y ambos son iguales, respectivamente, a $2a$ y $2b$. Luego el segmento $OB = b$, en virtud de la relación [2] se ve que es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $OF = ae$, y el otro cateto $OA = a$ (figura 84).

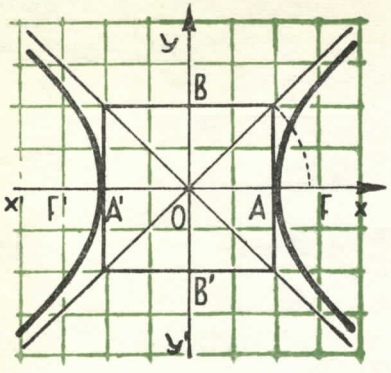


FIG. 84

180. **Intervalos de existencia.**— Resolviendo la ecuación [7], primero respecto a y, se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \quad ; \quad \frac{x^2 - a^2}{a^2} \cdot b^2 = y^2$$

o sea:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Para que y no sea imaginaria, ha de verificarse la inecuación

$$x^2 - a^2 \geq 0 \quad , \quad \text{o sea} \quad (x - a)(x + a) \geq 0$$

que se satisface para

$$\infty > x \geq a \quad , \quad -\infty < x \geq -a$$

Por tanto, x puede recibir valores absolutos mayores o iguales que a, pero no valores que cumplan la limitación $-a < x < a$.

Despejando x, queda:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2 + y^2}{b^2} \quad ; \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2)$$

o sea:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$$

Para que x sea real, y puede recibir cualquier valor. La curva consta, pues, de dos ramas separadas, una a la derecha de la recta $x = a$, y la otra a la izquierda de la recta $x = -a$, y ambas ramas tienen coordenadas que en valor absoluto crecen indefinidamente.

EJEMPLO.—*Trazar la curva:*

$$x^2 - y^2 = 4$$

Cuando $y = 0$, $x = \pm 2$; cuando $x = 0$, y es imaginaria, de modo que la curva no corta al eje OY.

La curva es simétrica respecto de ambos ejes.

Escribiendo la ecuación en la forma:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 4},$$

vemos que y es imaginaria si x es en valor absoluto menor que 2. Valores de x mayores que 2 dan los siguientes puntos:

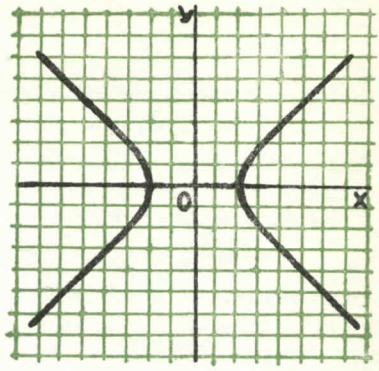


FIG. 85

x	3	4	5	6
y	$\pm\sqrt{5}$	$\pm 2\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{21}$	$\pm 4\sqrt{2}$

La porción de la curva correspondiente a valores negativos de x puede obtenerse por simetría (fig. 85).

181. **Asíntotas de la hipérbola.**—La ecuación [7], resuelta respecto a y, puede escribirse así:

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando x crece, el término $\frac{a^2}{x^2}$ decrece, y tiende a 0 cuando x tiende a infinito. De aquí se sigue que cuanto mayor se tome el valor de x, tanto más se aproximan los valores de las ordenadas de la hipérbola a las de las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$, diferenciándose de ellas en tan poco como se quiera. Dichas rectas, hacia las cuales tienden a aproximarse indefinidamente las ramas de hipérbola cuando x tiende a infi-

nito, se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Son de gran importancia tanto en el trazado de la curva como en el estudio de sus propiedades.

De las ecuaciones de las asíntotas

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad [8]$$

se deduce un método conveniente para trazar las asíntotas de cualquier hipérbola cuyos ejes son conocidos:

Las asíntotas de una hipérbola son las diagonales del rectángulo, cuyo centro es el centro de la curva y cuyos lados son paralelos e iguales a los ejes de la curva.

182. **Hipérbola equilátera o rectangular.**—La hipérbola en que a y b son iguales se llama, por razón de la igualdad de sus semiejes, hipérbola *equilátera*. Ya que el rectángulo de la figura 84 es en este caso un cuadrado, las asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí; por esta razón se llama también hipérbola *rectangular*. Ya que $a \cdot e = \sqrt{a^2 + b^2}$ la excentricidad de la hipérbola equilátera es $e = \sqrt{2}$ (fig. 86). La ecuación de la hipérbola equilátera toma la forma

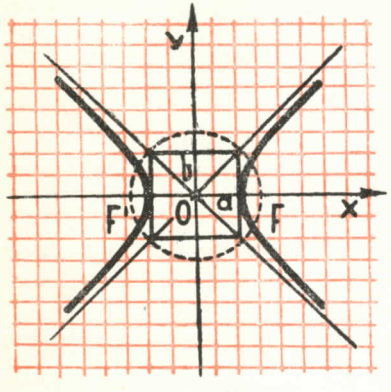


FIG. 86

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad [9]$$

y la de sus asíntotas,

$$y = \pm x \qquad [10]$$

de donde se deduce que son perpendiculares entre sí y bisectrices de los cuadrantes.

Siendo esto así, pueden tomarse las asíntotas como ejes de coordenadas rectangulares, y determinar la ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. Pero esto requiere que hallemos previamente las fórmulas del cambio de ejes de coordenadas. Dicho cambio puede consistir en una traslación o en una rotación de los ejes.

183. **Traslación de ejes.**—Supongamos que los ejes OX y OY se mueven paralelamente a sí mismos hasta que su origen O caiga en $O'(\alpha, \beta)$ (figura 87).

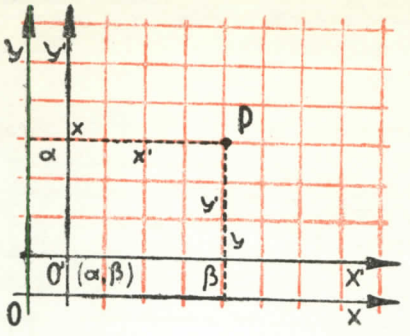


FIG. 87

Sea un punto P de coordenadas (x, y) respecto a los ejes antiguos OX y OY, y (x', y') respecto a los ejes nuevos O'X' y O'Y'.

Como se ve en la figura, es evidente que

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + x'; \\ y &= \beta + y'. \end{aligned}\right\} \qquad [11]$$

Estas son las *ecuaciones de traslación de los ejes* que buscábamos.

Para obtener la ecuación de una curva referida a ejes nuevos, conocida la ecuación referida a ejes antiguos, se sustituye en la ecuación dada los valores de x e y de la fórmula [11] y luego se reduce.

EJEMPLO 1.º *Las coordenadas de un punto son* (3, —2). *¿Cuáles serán las coordenadas del mismo punto respecto a un nuevo sistema de ejes paralelos a los primitivos, si se cortan en un punto* (1, —1), *respecto a* OX *y* OY?

Solución: Aquí $\alpha = 1$; $\beta = -1$; $x = 3$; $y = -2$.

Luego las ecuaciones [11] dan:

$$3 = 1 + x' \quad , \quad -2 = -1 + y' \quad ;$$

de donde:

$$x' = 2 \quad , \quad y' = -1.$$

EJEMPLO 2.º *Las coordenadas de un punto son* (3, —2). *¿Cuál será la ecuación de la circunferencia*

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

cuando los ejes se trasladan al nuevo origen (3, —2)? (fig. 88).

Solución: Aquí $\alpha = 3$, y $\beta = -2$, luego las ecuaciones [11] dan:

$$x = x' + 3 \quad , \quad y = y' - 2.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, tenemos:

$$(x' + 3)^2 + (y' - 2)^2 - 6(x' + 3) + 4(y' - 2) - 12 = 0.$$

o reduciendo, sale:

$$x'^2 + y'^2 = 25,$$

y suprimiendo acentos:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

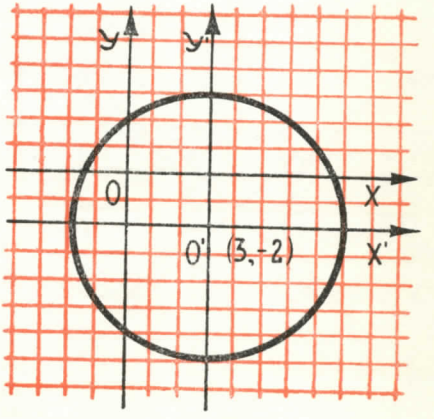


FIG. 88

Este resultado pudo preverse, ya que la ecuación dada es la de una circunferencia cuyo centro es (3, —2), y cuyo radio es 5. Cuando el origen se traslada al centro, la ecuación de la circunferencia necesariamente tiene la forma reducida.

184. **Rotación de ejes.**—Supongamos que los ejes OX y OY giran alrededor de O un ángulo δ, tomando las posiciones OX′ y OY′. Las ecuaciones que dan las coordenadas respecto a OX y OY referidas a OX′ y OY′ se llaman *ecuaciones de rotación de los ejes.*

Sea un punto P cuyas coordenadas antiguas y nuevas son respectivamente (x, y) y (x', y'). Por construcción $OM = x$, $ON = y$, $OM' = x'$, $M'P = y'$ (figura 89).

El ángulo M′PM es igual al X′OX = δ, por tener sus lados perpendiculares a los de éste.

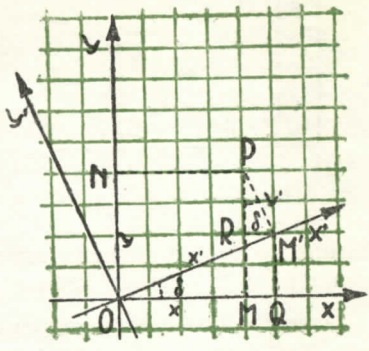


FIG. 89

Se tiene que

$$OM = OQ - MQ = OQ - RM' = OM' \cos \delta - M'P \operatorname{sen} \delta$$
$$ON = MR + RP = QM' + RP = OM' \operatorname{sen} \delta + M'P \cos \delta$$

Reemplazando OM, ON, OM′ y M′P por sus valores, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \delta - y' \operatorname{sen} \delta \\ y &= x' \operatorname{sen} \delta + y' \cos \delta \end{aligned}\right\} \qquad [12]$$

Como aplicación de estas fórmulas vamos a determinar la *ecuación asintótica* de la hipérbola equilátera.

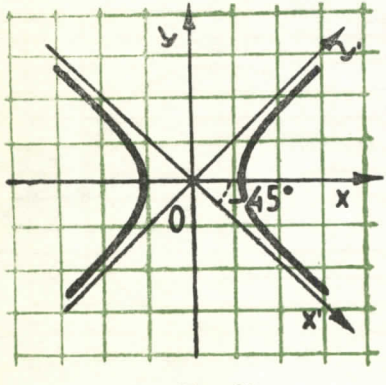


FIG. 90

185. **Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas.**—Vimos en el número 182 que la ecuación de la hipérbola equilátera, referida a sus ejes, es

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Si queremos referirla a sus asíntotas, lo cual es posible por ser éstas perpendiculares entre sí, deberemos hacer una rotación de ejes de —45° (figura 90), con el fin de que el eje OX se traslade a la asíntota OX′. Haciendo $\delta = -45°$ en las fórmulas [12], se obtiene:

$$\operatorname{sen}(-45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ y &= -x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y'-x'}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo en la fórmula [9]:

$$\frac{x'^2 + y'^2 + 2x'y'}{2} - \frac{x'^2 + y'^2 - 2x'y'}{2} = a^2$$

o sea:

$$2x'y' = a^2 \quad ; \quad x'y' = \frac{a^2}{2}$$

Llamando k a la constante $\frac{a^2}{2}$, y suprimiendo acentos, obtenemos este resultado:

La ecuación asintótica de la hipérbola equilátera es

$$\mathbf{xy = k} \qquad [13]$$

186. **Ecuación de la tangente a la hipérbola en uno de sus puntos.** Sea la hipérbola de ecuación [7] a la que queremos trazar la tangente en uno de sus puntos (x_1, y_1). Derivando dicha ecuación sale:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

de donde

$$y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

que aplicada al punto (x_1, y_1) da

$$y_1' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$$

valor que sustituido en la ecuación general de la tangente en un punto dado de una curva:

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1)$$

nos da

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

y trasponiendo el factor b^2 y el divisor y_1:

$$\frac{x_1x - x_1^2}{a^2} = \frac{y_1y - y_1^2}{b^2}$$

o sea:

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ya que el punto (x_1, y_1) pertenece a la hipérbola. La tangente es, pues:

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \qquad [14]$$

Se comprueba fácilmente que esta recta es *la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores del punto* (x_1, y_1).

187. **Otras formas típicas de la ecuación de la hipérbola.**—Las fórmulas de la hipérbola análogas a las del número 174 que dimos para la elipse, son las siguientes:

La ecuación de una hipérbola con centro en (α, β) *es, si el eje es paralelo al eje* OX,

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \ ; \qquad [15]$$

y si el eje transverso es paralelo al eje OY,

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \, . \qquad [16]$$

La demostración es análoga a la que allí se dio.

188. **Ecuación general de la hipérbola.**—La ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad [17]$$

donde A y C tienen signos *opuestos*, puede reducirse a una de las formas [15] o [16], completando los cuadrados en x e y. El solo caso excepcional es aquél en que el primer miembro puede expresarse como la diferencia de dos cuadrados, y el segundo miembro es nulo:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 0.$$

Esta ecuación puede descomponerse en factores, y, por lo tanto, representa dos rectas, que se cortan en (α, β).

Luego, *una ecuación de segundo grado en que falta el término en* x, y, *y los coeficientes de* x^2 *e* y^2 *tienen signos contrarios, representa una hipérbola con sus ejes paralelos a los ejes coordenados (excepcionalmente, dos rectas que se cortan).*

EJEMPLO.—*Hallar el centro y los ejes de la hipérbola:*

$$x^2 - 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0.$$

La escribiremos así:

$$x^2 + 4x - 2(y^2 - 2y) = -4.$$

Completando los cuadrados en x e y, tenemos:

$$x^2 + 4x + 4 - 2(y^2 - 2y + 1) = -2 \ ;$$

o sea,

$$(x + 2)^2 - 2(y - 1)^2 = -2 \ ,$$

y dividiendo por -2,

$$\frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(x+2)^2}{2} = 1 \, .$$

Esta es una hipérbola con centro en $(-2, 1)$ y eje real paralelo al eje OY; los semiejes son: $a = 1$, $b = \sqrt{2}$. Los vértices están a la distancia 1 del centro; los focos a la distancia $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}$ del centro, uno debajo y otro sobre el centro. Las asíntotas son las diagonales del rectángulo de lados $2a$ y $2b$.

EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes, halla los ejes y los focos, traza las asíntotas y la curva, determina la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas:

1. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

2. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1.$

3. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1.$

4. $\dfrac{y^2}{6} - \dfrac{x^2}{3} = 1.$

5. $4x^2 - 9y^2 = 36$

6. $3x^2 - 4y^2 = 4$

7. $2x^2 - 4y^2 + 1 = 0$

Halla las ecuaciones de las hipérbolas siguientes, suponiendo el centro en el origen O y el eje real en el eje OX:

8. Eje real, 18; distancia entre los focos, 24.

9. Excentricidad, $2\sqrt{2}$, semidistancia focal, 6.

10. Pasa por (2, 1) y (4, 3).

11. Focos $(\pm 4, 0)$; pendiente de las asíntotas, ± 3.

12. Halla la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, el eje transverso en el eje de las y, y que pasa por los puntos (4, 6) y (1, —3).

13. Un punto se mueve de modo que la diferencia de sus distancias a (3, 0), (—3, 0) es 2. Halla la ecuación de su lugar.

14. Un punto se mueve de modo que la diferencia de sus distancias a (0, 4) y (0, —4) es 6. Halla la ecuación de su lugar.

15. Una circunferencia es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2cx = 0$, y pasa por $(c, 0)$. Halla el lugar de su centro.

16. Una circunferencia móvil es tangente exteriormente a las dos circunferencias $(x - 2c)^2 + y^2 = c^2$, $(x + 2c)^2 + y^2 = 4c^2$. Halla el lugar de su centro.

17. Halla la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos $(\pm 4, 0)$ y el eje transverso es igual a 6.

18. Halla la ecuación de una hipérbola cuyos focos son los puntos $(0, \pm 3)$ y el eje transverso es igual a 4.

19. Halla la ecuación de una hipérbola cuyos vértices equidistan del centro y del foco respectivo.

20. Halla la ecuación de una hipérbola que tiene su centro en el origen, por asíntotas las rectas $y = \pm \frac{3}{4} x$, y por focos los puntos $(\pm 2, 0)$.

21. Halla la ecuación de una hipérbola que tiene su centro en el origen, por asíntotas las rectas $y = \pm \frac{3}{4} x$, y pasa por el punto (2, 1).

22. Un punto se mueve de modo que el producto de sus distancias a las rectas $4x - 3y + 11 = 0$ y $4x + 3y + 5 = 0$ es $\frac{144}{25}$. Halla la ecuación del lugar.

23. Un punto se mueve de modo que su distancia al punto (0, 4) es $\frac{4}{3}$ de su distancia a la recta $4y - 9 = 0$. Halla la ecuación del lugar.

24. Determina la ecuación de la hipérbola con centro en (—4, 1), vértice (2, 1), y semieje no transverso 4.

25. Halla: *a)* el centro; *b)* los vértices; *c)* las ecuaciones de las asíntotas; *d)* traza la hipérbola cuya ecuación es $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

26. Escribe la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (4, 6) y cuyas asíntotas son $y = \pm \sqrt{3}x$.

27. En los ejercicios siguientes halla el centro, vértices, focos y asíntotas:
   a) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$.
   b) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$.
   c) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0$.

28. Transforma las siguientes ecuaciones, si los ejes se trasladan al nuevo origen indicado, y traza ambos pares de ejes y las líneas:

a) $3x - 4y = 6$, $(2, 0)$.

b) $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$, $(2, -1)$.

c) $y^2 - 6x + 9 = 0$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

d) $x^2 - y^2 - 2x - 3 = 0$, $(1, 0)$.

29. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, -2)$, si los ejes giran 60°?

30. Transforma la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 3xy - 7 = 0$ respecto a nuevos ejes que forman con los primeros un ángulo de 45°.

31. Transforma la ecuación $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 14 = 0$, respecto a nuevos ejes que forman con los primeros un ángulo positivo arc tg $\frac{2}{3}$.

32. Determina la traslación de los ejes que transformará la ecuación $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 135$ en otra en que los coeficientes de los términos de primer grado sean nulos.

33. Determina la traslación de los ejes que transformará la ecuación $y^2 - 4y - x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 0$ en otra en que los coeficientes de los términos de primer grado sean nulos.

34. Determina la ecuación de la parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ cuando los ejes giran 45°.

35. Transforma la ecuación $4x^2 + 2y^2 + 2\sqrt{3xy} - 5 = 0$, respecto a los nuevos ejes que forman con los primeros un ángulo de 30°.

36. Determina el ángulo que deben girar los ejes para eliminar el término en xy de la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3xy} + 13y^2 = 16$.

37. Halla la ecuación de la tangente y normal a la hipérbola en el punto dado:

a) $2x^2 - 3y^2 = 6$ en $(-3, 2)$.

b) $5x^2 - y^2 = 20$ en $(3, -5)$.

c) $xy = 3$ en $x = -1$.

38. Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola:

a) $x^2 - y^2 = 9$, perpendicular a la recta $4x + 5y = 40$.

b) $xy = 3$, paralela a la recta $3x + y = -9$.

39. Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola por el punto dado:

a) $x^2 - 2y^2 = 7$ por $(-1, 5)$.

b) $xy = 2$ por $(6, -1)$.

c) $x^2 - xy - y^2 + x + 2y = 0$ por $(-2, 1)$.

22

La parábola

189. **Definiciones.**—*La parábola es el lugar de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.*

La recta trazada por el foco perpendicular a la directriz se llama *eje* de la parábola. El punto en que el eje corta a la curva, esto es, el punto medio entre el foco y la directriz, se llama *vértice* de la parábola. La distancia del vértice al foco la designaremos por f, o *distancia focal*, por analogía con los espejos curvos.

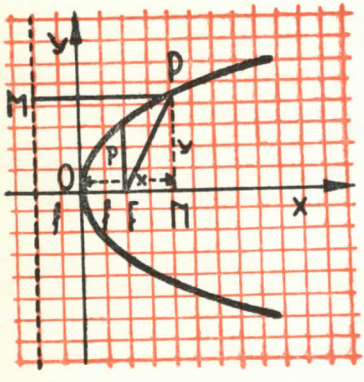


Fig. 91

190. **Ecuación de la parábola.**—Tomemos el vértice de la parábola como origen de coordenadas, y el eje de la curva como eje OX; el foco es el punto F(f, o) y la directriz es la recta $x = -f$. Si P(x, y) es un punto cualquiera de la curva por definición de parábola se tendrá (fig. 91):

$$FP = MP$$

y elevando al cuadrado

$$\overline{FP^2} = \overline{MP^2} \; ; \qquad [1]$$

Es fácil ver que

$$\overline{FP^2} = \overline{FN^2} + \overline{NP^2} = (x - f)^2 + y^2 \; ;$$

$$\overline{MP^2} = (x + f)^2$$

Sustituyendo sale

$$(x - f)^2 + y^2 = (x + f)^2 \, ,$$

o reduciendo

$$-2fx + y^2 = 2fx \, ,$$

y en definitiva,

$$y^2 = 4fx \, . \qquad [2]$$

De la ecuación [2] se deduce que f y x deben tener el mismo signo, ya que y^2 siempre es positivo. Luego la curva es cóncava: dirige la

concavidad hacia la derecha o hacia la izquierda, según que f sea positivo o negativo. Por cada valor de x existen dos valores de y, iguales en valor absoluto pero de signos opuestos, que crecen indefinidamente a medida que también lo hace x; luego la curva es abierta y se extiende hasta el infinito, y es simétrica respecto al eje OX.

191. **Parámetro de la parábola.**—*Es la distancia de la directriz al foco.* O sea, designándole por p:

$$p = 2f \qquad [3]$$

Es fácil ver, según la definición de parábola, que su valor coincide con el de *la ordenada focal,* esto es, con la mitad de la longitud de la cuerda trazada por el foco perpendicularmente al eje.

Sustituyendo el valor [3] de p en la fórmula [2], se obtiene *la ecuación de la parábola en la forma corrientemente empleada*

$$y^2 = 2px \qquad [4]$$

192. **Otras formas típicas de la ecuación de la parábola.**—Sea ahora una parábola con el vértice en el punto $V(\alpha, \beta)$ y el eje paralelo a OX (fig. 92). La ecuación referida a unos ejes VX′ y VY′, paralelos a los dados, es

$$y'^2 = 2px'$$

Pero según las fórmulas de la traslación de ejes (núm. 184), dicha ecuación referida a los ejes dados será:

$$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$$

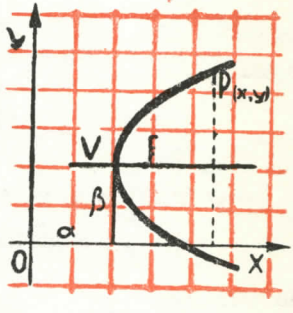


FIG. 92

Podemos proceder análogamente cuando el eje es paralelo a OY. En resumen, tenemos los siguientes resultados:

La ecuación de una parábola con el vértice en (α, β) *si el eje es paralelo a* OX, *es*

$$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha) \ ; \qquad [5]$$

y si el eje es paralelo a OY,

$$(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta). \qquad [6]$$

Es decir, *el cuadrado de la perpendicular trazada desde un punto de la parábola a su eje de simetría es igual a cuatro veces el producto de las distancias desde el vértice al foco y al pie de la perpendicular.*

Aunque la ecuación de la parábola frecuentemente no viene dada en las formas [5] y [6], puede reducirse a éstas como se indica en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1.º *Hallar el eje, vértice, foco y directriz de la parábola* $y^2 + 4x + 4y = 0$.

Solución: Esta ecuación puede escribirse:

$$y^2 + 4y = -4x$$

Completando el cuadrado:

$$y^2 + 4y + 4 = -4x + 4,$$
$$\mathbf{(y+2)^2 = -4(x-1)}$$

que es de la forma [5].

Luego el eje de la parábola es $y = -2$; el vértice es el punto $(1, -2)$. Ya que $2p = -4$, tenemos $p = -2$. Luego la abscisa del foco es $1 + (-1) = 0$, y su ordenada -2; y la ecuación de la directriz es $x = 2$.

Ya que p es negativo, la parábola está a la izquierda de $x = 1$.

EJEMPLO 2.º *Escribir en la forma típica la ecuación* $3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.

Solución: La ecuación puede escribirse así:

$$x^2 - \frac{4}{3}x = 2y - \frac{8}{3}$$

Completando el cuadrado:

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 2y - \frac{8}{3} + \frac{4}{9};$$

o sea:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 2\left(y - \frac{10}{9}\right)$$

que es de la forma [6].

Luego $p = 1$, y la parábola es concava hacia arriba. El eje de la parábola es $x = \frac{2}{3}$; el vértice es $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{9}\right)$; el foco es $\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{18}\right)$, y la directriz $y = \frac{11}{18}$.

193. Ecuación general de la parábola.—Desarrollando el cuadrado en la ecuación [6] resulta:

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 2p(y - \beta)$$

o sea:

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{\alpha}{p}x + \frac{\alpha^2}{2p} + \beta$$

Llamando: $\frac{1}{2p} = a$, $-\frac{\alpha}{p} = b$, $\frac{\alpha^2}{2p} + \beta = c$, queda para ecuación general de la parábola

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c} \qquad [7]$$

Dicha parábola es cóncava hacia arriba, si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$. Análogamente de la ecuación [5] se deduce:

$$\mathbf{x = a'y^2 + b'y + c'} \qquad [8]$$

parábola cóncava hacia derecha si $a' > 0$, y hacia izquierda si $a' < 0$.

Luego:

TEOREMA: *Una ecuación de segundo grado en la que falta el término en* xy, *y contiene un solo término cuadrado, representa una parábola con su eje paralelo a la variable que entra sólo con el primer grado (excepcionalmente, dos rectas paralelas o coincidentes, o carece de gráfica).*

194. **Tangente a la parábola en uno de sus puntos.**—Sea hallar la tangente a la parábola $y^2 = 2px$, en uno de sus puntos de coordenadas (x_1, y_1). Derivando respecto a x los dos miembros de la fórmula [4]:

$$2yy' = 2p$$

Despejando y':

$$y' = \frac{p}{y} \quad ; \quad y'_1 = \frac{p}{y_1}$$

La ecuación de la tangente será:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

y quitando denominadores:

$$y_1 y - y_1^2 = px - px_1$$

Haciendo la trasposición de términos:

$$y_1 y = px + y_1^2 - px_1 = px + 2px_1 - px_1$$

Por tanto, la ecuación de la tangente es:

$$\mathbf{y_1 y = px + px_2} \qquad [9]$$

Se comprueba que desde el punto de vista meramente formal, para hallar la ecuación de la tangente, basta escribir la ecuación de la parábola en la forma $y \cdot y = px + px$, y reemplazar en ella una y por y_1, y una x por x_1.

195. **Normal a la parábola.**—Tiene de ecuación:

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{p}(x - x_1)$$

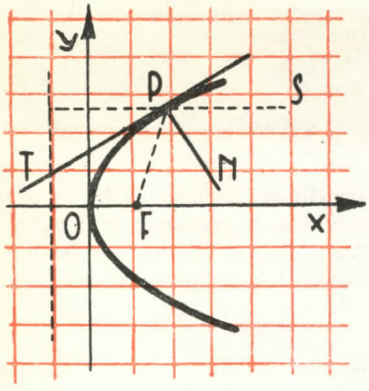


FIG. 93

o sea:

$$py - py_1 = -y_1x + x_1y_1 \ ;$$
$$y_1x + py - y_1(p + x_1) = 0.$$

Se comprueba fácilmente (fig. 93) que la normal PN es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector PF y la perpendicular a la directriz PS. Esta propiedad es muy importante y encuentra gran aplicación en los *espejos parabólicos*, de tanto uso en automóviles, reflectores, etc. Todos los rayos que provienen del foco F salen paralelos al eje del espejo.

EJERCICIOS

En los casos siguientes, sitúa el vértice, foco y unos cuantos puntos más y traza la curva.

1. $y^2 = 6x$.
2. $y^2 = -6x$.
3. $x^2 = -6y$.
4. $x^2 = -y$.
5. $3y^2 + x = 0$.
6. $7x^2 = 3y$.
7. $(x + 1)^2 = \frac{4}{3}(y - 1)$.
8. $(y - 2)^2 = -10(x + 3)$.
9. $(y + 3)^2 = -3(x + 1)$.
10. $(x - 10)^2 = 100(y - 5)$.

Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

11. Directriz $x = 0$, vértice $(3, 4)$.
12. Foco $(0, -3)$, vértice $(2, -3)$.
13. Eje $x = 0$, vértice $(0, -4)$, pasa por $(6, 0)$.
14. Eje $y = 0$, vértice $(6, 0)$, pasa por $(0, 4)$.
15. Directriz $x + 2y - 1 = 0$, foco $(0, 0)$.
16. Directriz $x = 1$, vértice $(2, 4)$.
17. Directriz $y + 1 = 0$, vértice $(-3, 2)$.
18. Eje $y = 0$, foco $(2, 0)$, parámetro 12.
19. Eje $x = 0$, foco $(0, 6)$, parámetro 8.
20. Eje paralelo a OY, vértice en OX, pasa por $(2, 3)$ y $(-1, 12)$.

21. Eje paralelo a OX, vértice en OY, pasa por $(-4, 1)$ y $(-1, -1)$.

22. Eje paralelo a OY, vértice en la recta $y = 2$, parámetro 3, pasa por $(0, 8)$.

23. Eje paralelo a OX, parámetro $\frac{1}{2}$, pasa por $(-6, 4)$ y $(9, 1)$.

24. Foco en $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ directriz $y = \frac{4}{3}$

En los siguientes casos, reduce a la forma típica, sitúa el vértice, determina el parámetro y el foco y la ecuación de la directriz.

25. $y^2 + 8x + 8 = 0$.

26. $y^2 - 5x + 10 = 0$.

27. $x^2 - 4x - 4y = 0$.

28. $x^2 + 6x - y - 2 = 0$.

29. $y^2 + 5x - 3y = 0$.

30. $x^2 - x - y = 3$.

31. $2x^2 + 4x + y + 6 = 0$.

32. $3y^2 - 2x - 6y = 0$.

33. $4y^2 - 12y + 9 = 0$.

34. $5x^2 - 6x + 1 = 0$.

35. Halla la ecuación de la parábola con el vértice en la recta $7x + 3y - 4 = 0$, que pasa por los puntos $(3, -5)$ y $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ siendo el eje horizontal.

36. Halla la ecuación de la parábola con eje paralelo a OX y que pasa por $(6, 1)$, $(-2, 3)$, $(16, 6)$.

37. Halla la ecuación de una parábola con eje paralelo a OX y que pasa por $(1, -1)$, $(9, 1)$, $(9, -2)$.

38. Halla la tangente a la parábola en el punto dado:
a) $2y^2 + x = 0$, en $(-8, -2)$.
b) $3y^2 = 4x$, en $(3, -2)$.
c) $x^2 = 8y$, en $(4, 2)$.

39. Halla las ecuaciones de la tangente y de la normal de:
a) $(x + 1)^2 = 2(y - 3)$, en $x = 1$.
b) $y = x^2 - 2x - 1$, en $x = 2$.
c) $y = \sqrt{x} + 7$, en $(2, 3)$.

40. Un arco de parábola tiene en la base una anchura de 24 m; la altura del arco es 18 m. ¿Cuál es la altura a 8 m del centro de la base?

41. Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, construye otra cuyas soluciones sean las inversas de las de la dada.

42. Determina el valor de m en la siguiente ecuación: $5x^2 + 4x + m = 0$, para que sus dos raíces sean iguales, y descomponer el trinomio en factores.

43. Forma la ecuación de segundo grado, cuyas raíces son los cuadrados de las de la ecuación: $x^2 - px + q = 0$.

44. Determina c en la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$, para que la suma de los cuadrados de sus raíces sea igual a 17.

23

Integrales indefinidas

196. **Función primitiva.**—*Función primitiva de una función dada es otra función cuya derivada coincide con la función dada.* Así, dada la función

$$y = x^2 \qquad [1]$$

una función primitiva es

$$y = \frac{x^3}{3} \qquad [2]$$

ya que la derivada de esta última vale

$$y' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Pero es evidente que la función dada [1] tiene muchas otras funciones primitivas, que se obtienen añadiendo a la primitiva más sencilla [2] una constante C cualquiera, llamada *constante de integración*. Así, pues, todas las funciones primitivas de la función [1] se representan por

$$y = \frac{x^3}{3} + C \qquad [3]$$

En efecto, la derivada del sumando C, cualquiera que sea su valor, es siempre nula (núm. 100).

197. **Integral indefinida.**—*Integración es la operación inversa de la diferenciación, y consiste, dado un diferencial, en hallar la función de que proviene.* Esta función se denomina *integral indefinida* del diferencial dado. Por tanto:

Integral indefinida de un diferencial dado es una función cuyo diferencial coincide con el dado.

La integral se representa por el símbolo $\int$, parecido a una S alargada. Así:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

ya que $d\left(\frac{x^3}{3}+C\right)=x^2dx$. La integral indefinida tiene, por tanto, infinitas soluciones, que se obtienen añadiendo a la integral más sencilla la constante de integración C.

Otros ejemplos:

$$\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C \quad , \text{ ya que } \quad d\left(\frac{x^6}{6}+C\right)=x^5dx$$

$$\int 7dx=7x+C \quad , \text{ ya que } \quad d(7x+C)=7dx$$

$$\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C \quad \text{ ya que } \quad d\left(\frac{x^4}{4}+C\right)=x^3dx$$

y en general

$$\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad [4]$$

puesto que

$$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)=\frac{(n+1)x^n}{n+1}dx=x^ndx.$$

Para integrar una función potencial se aumenta el exponente de la potencia en una unidad, y se divide por el exponente que resulta.

198. **Integral del producto de una constante por una función.**—Ya que la derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función, es fácil ver que la integral tendrá una propiedad análoga. Así:

$$\int 7x^2dx=7\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{7x^3}{3}+C$$

puesto que

$$d\left(7\cdot\frac{x^3}{3}+C\right)=7\cdot\frac{3x^2}{3}dx=7x^2dx$$

Esto nos indica que *toda constante que aparezca multiplicando o dividiendo a la función puede salir fuera del signo integral.* Así:

$$\int 5x^3dx = 5\int x^3dx = 5\cdot\frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{10x^2}dx = \frac{1}{10}\int x^{-2}dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{10x} + C$$

199. **Integral de una suma de funciones.**—Ya que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas, es evidente que la integral poseerá una propiedad análoga. Por ejemplo:

$$\int (4x^4 - 6x^2 + 8x - 17)dx =$$

$$= 4\cdot\frac{x^5}{5} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^2}{2} - 17\frac{x^1}{1} + C =$$

$$= \frac{4x^5}{5} - 2x^3 + 4x^2 - 17x + C$$

puesto que

$$d\left(4\cdot\frac{x^5}{5} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^2}{2} - 17x + C\right) =$$

$$= \left(4\cdot\frac{5x^4}{5} - 6\cdot\frac{3x^2}{3} + 8\cdot\frac{2x}{2} - 17\right)dx =$$

$$= (4x^4 - 6x^2 + 8x - 17)dx$$

Por tanto, *la integral de una suma de funciones puede descomponerse en suma de integrales.* Así:

$$\int\left(11x + \frac{11}{x^3}\right)dx = 11\int xdx + 11\int x^{-3}dx =$$

$$= 11\frac{x^2}{2} + 11\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{11x^2}{2} - \frac{11}{2x^2} + C$$

200. **Integrales inmediatas.**—Son aquellas que se deducen inmediatamente de la definición de integral. He aquí las principales:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = L(x+a) + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\ tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\ sen} x + C$$

Todas estas integrales pueden comprobarse viendo que al diferenciar los segundos miembros aparecen las diferenciales que están bajo signo integral.

El cálculo de una función primitiva $\Phi(x)$ de una función dada $f(x)$ se reduce a transformar $f(x)$ de modo que esté comprendida en uno de los casos enumerados en este cuadro de integrales elementales. Esto se consigue unas veces por simple descomposición de $f(x)$ en sumandos que sean otras tantas integrales inmediatas; otras por sustitución o cambio de variables; otras por integración por partes, y otras por procedimientos que aquí no podemos estudiar.

201. **Integración de funciones racionales cuyo numerador es de grado mayor o igual que el del denominador.**—Se procede dividiendo el numerador por el denominador, y descomponiendo la integral en suma de integrales.

EJEMPLO 1.º

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2}\,dx = \int \left(x^2 - 10 + \frac{5}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx - 10 \int dx + 5 \int x^{-2} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 10x + 5 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - 10x - \frac{5}{x} + C$$

2.º $$\int \frac{x^3}{x+1} dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - L(x+1) + C$$

202. **Integración de funciones irracionales sencillas.**—Se ponen las raíces en forma de potencia y se aplica la regla de la integral de la función potencial.

EJEMPLOS:

1.º $$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

2.º $$\int \sqrt[6]{x}\, dx = \int x^{1/6} dx = \frac{x^{7/6}}{7/6} + C = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + C$$

3.º $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$$

4.º $$\int \sqrt{3x}\, dx = \sqrt{3} \int \sqrt{x}\, dx = \sqrt{3} \int x^{1/2} dx =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{3} \sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x^3} + C$$

5.º $$\int \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx = \int (4 - 2x^{-1/2})\, dx = 4x -$$

$$- 2 \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 4x - 4\sqrt{x} + C$$

203. Integración por sustitución.—Las siguientes formas típicas son fáciles de demostrar. Basta hacer en ellas $u'dx = du$ para reducirlas a inmediatas:

$$\int u^n \cdot u'dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \quad (n \neq -1) \qquad [5]$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = Lu + C; \qquad [6]$$

$$\int u' \cdot a^u dx = \frac{a^u}{La} + C; \qquad [7]$$

$$\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C; \qquad [8]$$

$$\int u \cos u dx = \operatorname{sen} u + C; \qquad [9]$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \operatorname{tg} u + C; \qquad [10]$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -\operatorname{ctg} u + C; \qquad [11]$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arc\,tg} u + C; \qquad [12]$$

EJEMPLOS. 1.º Hallar $\int e^{3x} dx$.

Esta integral es de la forma [7], donde $u = 3x$, y por tanto, $u' = 3$. Para que aparezca este factor en la integral, multiplicamos y dividimos por 3, y queda

$$\frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{3x}}{Le} + C = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + C$$

en virtud de la fórmula [7], y ya que $Le = 1$.

2.º Hallar $\int \operatorname{sen} 2x dx$.

Esta integral es de la forma [8], donde $u = 2x$, y por tanto, $u' = 2$. Para que aparezca este factor en la integral y la analogía sea completa, multiplicamos y dividimos por 2, resultando

$$\frac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

3.º Hallar $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Esta integral es de la forma [6], donde $u = 1 + x^2$, y $u' = 2x$. Para que en el numerador aparezca el término $2x$, precisamos dividir y multiplicar por 2 a la integral, obteniéndose

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1+x^2) + \mathrm{C}$$

4.º Hallar $\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Esta integral es de la forma [7], donde $u = \sqrt{x}$ y $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Por tanto, para que la analogía sea completa, basta multiplicar y dividir por 2, resultando

$$2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot a^{\sqrt{x}}\,dx = 2\,\frac{a^{\sqrt{x}}}{\mathrm{La}} + \mathrm{C}$$

5.º Hallar $\int \cos 5x\,dx$.

Multiplicando y dividiendo por 5 esta integral se reduce a la forma [9], o sea:

$$\frac{1}{5}\int 5 \cdot \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\ \mathrm{sen}\ 5\mathrm{x} + \mathrm{C}$$

6.º Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-3x}}$

Multiplicando y dividiendo por -3, esta integral se reduce a la forma [5]. Así:

$$-\frac{1}{3}\int (-3)\cdot(5-3x)^{-1/3}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{(5-3x)^{2/3}}{2/3} + \mathrm{C} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt[3]{(5-3x)^2} + \mathrm{C} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(5-3\mathrm{x})^2} + \mathrm{C}$$

EJERCICIOS

1. $\int x^6 dx$
2. $\int \frac{dx}{x^4}$
3. $\int x\sqrt{x}\,dx$
4. $\int \sqrt[4]{x}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}}$
6. $\int \frac{ax^2dx}{b}$

7. $\int \sqrt{5x}\,dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{bx}}$

9. $\int \sqrt{2ax}\,dx$

10. $\int (x^3 + 6x^2 + 10x - 5)\,dx$

11. $\int \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - 5\right)dx$

13. $\int x(2x - 5)\,dx$

14. $\int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2}\,dx$

15. $\int \sqrt{3 - 4x}\,dx$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5 - 3x}}$

17. $\int \left(\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)dx$

18. $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{3x}}$

19. $\int (3x - 4)^2 dx$

20. $\int \frac{3x\,dx}{(x^2 + 1)^2}$

21. $\int x\sqrt{2x^2 + 7}\,dx$

22. $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{8 - x^2}}$

23. $\int (1 + \sqrt{x})^2\,dx$

24. $\int \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$

25. $\int \sqrt{x}\,(1 - x^2)\,dx$

26. $\int \frac{dx}{(7 - 4x)^n}$

27. $\int x^2(2 - x^3)^5 dx$

28. $\int \frac{x^2 dx}{(3 + 2x^3)^2}$

29. $\int 5x\sqrt{1 - 2x^2}\,dx$

30. $\int (2x^{3/2} + 1)^{2/5}\sqrt{x}\,dx$

31. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

32. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\,dx$

33. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\,dx$

34. $\int \operatorname{tg} ax \sec^2 ax\,dx$

35. $\int \frac{\operatorname{sen} 3x\,dx}{\sqrt{5 + \cos 3x}}$

36. $\int \left(\frac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)^2 dx$

37. $\int \frac{dx}{3+2x}$

38. $\int \frac{x\,dx}{2-x^2}$

39. $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+5x}$

40. $\int \frac{2x^2 dx}{8x^3-7}$

41. $\int \frac{ax^n dx}{1+bx^{n+1}}$

42. $\int \frac{e^x dx}{4-3e^x}$

43. $\int \frac{2\,\cos x\,dx}{4+\operatorname{sen} x}$

44. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{a+b\,\operatorname{tg} x}$

45. $\int \frac{x+2}{x-1}\,dx$

46. $\int \frac{(x-1)^2 dx}{2x}$

47. $\int \frac{x^2-4}{x-3}\,dx$

48. $\int 4e^{2x}\,dx$

49. $\int 2e^{x/5}\,dx$

50. $\int \frac{dx}{e^x}$

51. $\int 10^x\,dx$

52. $\int a^{nx}\,dx$

53. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

54. $\int xe^{x^2}dx$

55. $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

56. $\int e^{\operatorname{sen} 2x}\cos 2x\,dx$

57. $\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$

58. $\int \cos 3x\,dx$

59. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$

60. $\int \operatorname{sen}(2x+1)\,dx$

61. $\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x}\,dx$

62. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$

63. $\int (1+\operatorname{tg} x)^2\,dx$

64. $\int e^x \cos e^x\,dx$

65. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

66. $\int (\operatorname{tg} 2x+\sec 2x)^2\,dx$

67. $\int \operatorname{cosec} x \, dx$

68. $\int (\sec 4x - 1)^2 \, dx$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

70. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

71. $\int \frac{dx}{1 + x^2}$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

73. $\int \frac{dx}{9 + x^2}$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}}$

24

Integrales definidas

204. El problema del área.—Consiste en hallar el área encerrada por una curva cualquiera. Este problema fue el que dio origen al cálculo integral, del mismo modo que el problema de la tangente dio origen al cálculo diferencial.

Veremos que el problema del área se reduce al de hallar el área de un *trapecio mixtilíneo,* comprendido entre un arco de curva, el eje OX y dos ordenadas extremas.

205. Area de un trapecio mixtilíneo.—Sea $y = f(x)$ la función que representa la curva dada (fig. 94). Si descomponemos el intervalo (a, b) en n partes iguales a Δx, y llamamos

$$y_0, y_1, y_2 \ \dots \ y_{n-1}, y_n$$

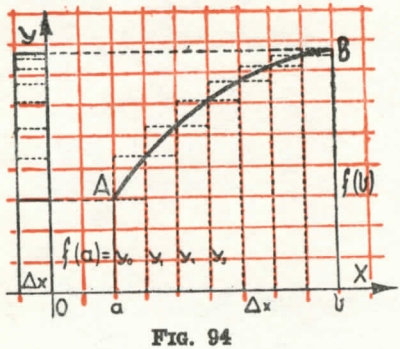


FIG. 94

las ordenadas de los puntos de división, la suma de las áreas de los rectángulos contenidos dentro del trapecio mixtilíneo es

$$S_i = y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ \dots + y_{n-1}\Delta x = \sum_{i=0}^{i=n-1} y_i\Delta x$$

y la suma de las áreas de los rectángulos de alturas máximas es

$$S_e = y_1\Delta x + y_2\Delta x + y_3\Delta x + \ \dots + y_n\Delta x = \sum_{i=1}^{i=n} y_i\Delta x$$

Los rectángulos inscritos o interiores están dentro del trapecio, y éste dentro del polígono formado por los rectángulos mayores o exteriores. Luego cualquiera que sea el número n de partes en que se divida el intervalo, toda suma S_i será menor que el área S del trapecio, y éste a su vez menor que toda suma S_e, o sea

$$S_i < S < S_e$$

Veamos ahora que la diferencia $S_e - S_i$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, aumentando n convenientemente. Esto es evidente observando que esta diferencia está formada por la suma de los rectangulitos que encierran la curva, que se han representado a izquierda del eje OY. Dicha diferencia vale

$$(y_n - y_o)\Delta x$$

y tiende a cero, porque $\Delta x \to 0$ cuando $n \to \infty$. Las sumas S_i y S_e forman dos sucesiones monótonas convergentes que definen un área única S, o sea

$$S = \lim_{n\to\infty} S_i = \lim_{n\to\infty} S_e = \lim_{n\to\infty} \Sigma y_i \Delta x \qquad [1]$$

Más general: si como altura de los rectángulos parciales no se elige precisamente la menor de las coordenadas, ni la mayor, sino una cualquiera de las ordenadas del intervalo (fig. 95), se tiene una suma Σ, comprendida entre S_i y S_e, y por tanto con el mismo límite. Esto es

$$S = \lim_{n\to\infty} \Sigma y \Delta x = \lim_{n\to\infty} \Sigma f(x)\Delta x$$

que nos dice: *el área del trapecio mixtilíneo es el límite de la suma de los productos obtenidos multiplicando cada intervalo parcial por una cualquiera de las ordenadas de la función* comprendidas en dicho intervalo.

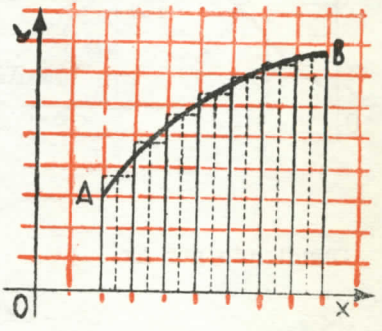


FIG. 95

No sólo en el cálculo del área, sino en muchos otros problemas, se presenta un límite parecido. Tal límite se llama *integral definida* entre a y b, y se representa así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Sigma f(x)\Delta x$$

Integral definida es el límite de una suma de infinitos productos que se obtienen multiplicando cada intervalo infinitesimal de x *por un valor de la función en dicho intervalo.*

El área del trapecio, por tanto, viene dada por una integral definida.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad [3]$$

Si el cálculo de la integral definida hubiera de hacerse tal como lo expresa la definición, el problema del área quedaría prácticamente sin solución. Pero la fecundidad del Cálculo integral estriba en que, como veremos en los próximos números, el valor de las integrales definidas se halla mediante las integrales indefinidas, estudiadas en la lección anterior.

206. **Derivada del área de un trapecio mixtilíneo.**—En el trapecio comprendido entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y dos ordenadas extremas, dejemos de momento fija la ordenada inicial en $x = a$, y variable la ordenada final en un punto x variable (fig. 96 a). Entonces el área del trapecio es una función creciente de x, que llamaremos $S(x)$.

Si damos a x un incremento Δx, $S(x)$ sufrirá otro incremento ΔS. Este incremento es un trapecio mixtilíneo, que será menor que el rectángulo exterior $f(x)\Delta x$ (fig. 96 a), pero mayor que el rectángulo interior o inscrito $f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$. Por tanto:

$$\Delta x \cdot f(x + \Delta x) < \Delta S < f(x) \cdot \Delta x$$

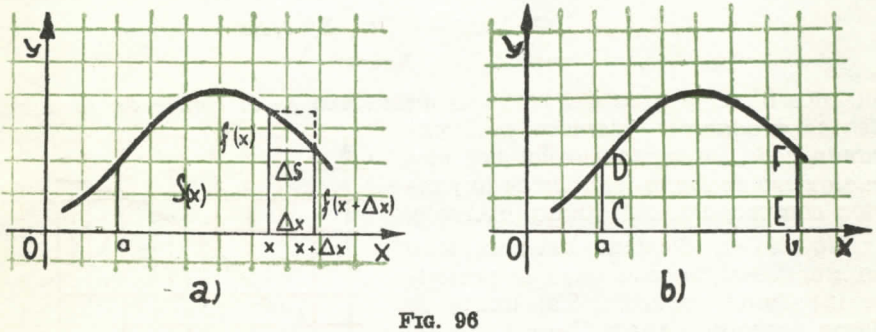


FIG. 96

Dividiendo por Δx:

$$f(x + \Delta x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x) \qquad [4]$$

Y haciendo que $\Delta x \to 0$:

$$f(x) < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x)$$

esto es:

$$\frac{dS(x)}{dx} = f(x) \qquad [5]$$

Es decir, *la derivada del área limitada por una curva plana, el eje* OX, *una ordenada fija y una ordenada variable es igual a dicha ordenada variable*; o sea, que el *área es una función primitiva de la función dada.*

207. **Valor de la integral definida.**—De la igualdad [5] sale:

$$dS(x) = f(x)\,dx$$

Integrando:

$$S(x) = \int f(x)\,dx$$

Designando el valor de $\int f(x)\,dx$ por $F(x) + C$, resulta:

$$S(x) = F(x) + C \qquad [6]$$

Determinaremos el valor de C observando que $S(x) = 0$ cuando $x = a$. Sustituyendo estos valores en la igualdad [6], tenemos (fig. 96 b):

$$S(a) = 0 = F(a) + C\ ,$$

de donde:

$$C = -F(a)$$

Por tanto, la fórmula [6] se convierte en:

$$S(x) = F(x) - F(a) \qquad [7]$$

El área pedida $CDFE$ que resulta de fijar la ordenada final (fig. 96 b) es el valor de $S(x)$, dado por la fórmula [7], cuando $x = b$. Luego:

$$\text{área } CDFE = S(b) = F(b) - F(a) \qquad [8]$$

Por otra parte (número 205):

$$\text{área } CDFE = \int_a^b f(x)\,dx$$

Luego:

$$\mathbf{S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \qquad [9]$$

Luego, *para calcular el área de un trapecio curvilíneo limitado por el eje* OX, *la curva* f(x) *y dos ordenadas extremas en los puntos* x = a

y $x = b$, *y en general para calcular una integral definida, se procede así:* 1.º *Se halla una función primitiva de* $f(x)$. 2.º *Se sustituye en ella la variable por el límite superior* b *y luego por el límite inferior* a, *y se restan los resultados.*

No es necesario poner la constante de integración, ya que siempre desaparece al restar.

EJEMPLO 1.º:

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

EJEMPLO 2.º:

$$\int_0^1 \frac{dx}{4+5x} = \left[\frac{1}{5}\mathrm{L}(4+5x)\right]_0^1 = \frac{1}{5}(\mathrm{L}9 - \mathrm{L}4) = \frac{1}{5}\mathrm{L}\frac{9}{4}.$$

Para integrar se aplicó la fórmula [6] del número 203.

EJEMPLO 3.º:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg} x dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \left[\mathrm{L}\operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \mathrm{L}1 - \mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{L}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\mathrm{L}2$$

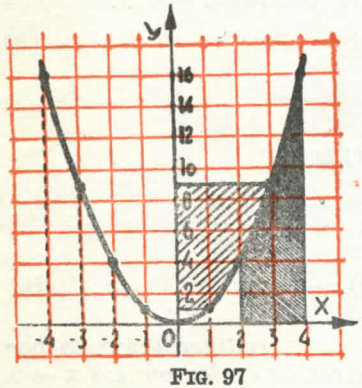


FIG. 97

Esta integral se obtiene de modo análogo al del ejemplo anterior.

208. **Areas planas en coordenadas cartesianas.**—Los resultados de los números anteriores permiten calcular el área limitada de cualquier modo por curvas cuyas ecuaciones vengan dadas en coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 1.º *Hallar el área limitada por la parábola* $y = x^2$, *el eje* OX *y las ordenadas* $x = 2$ *y* $x = 4$ (fig. 97).

Solución: Sustituyendo en la fórmula [9]:

$$\text{área ABCD} = \int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$$

EJEMPLO 2.º *Hallar el área del recinto limitado entre una semionda de la curva* $y = \text{sen } x$ (fig. 98) *y el eje* OX.

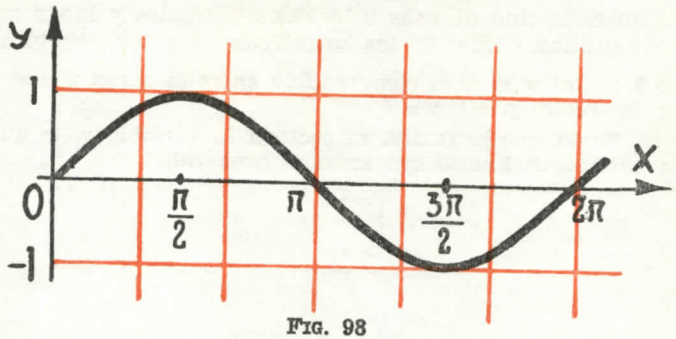


FIG. 98

Solución: Haciendo $y = 0$, queda

$$\text{sen } x = 0,$$

que, resuelta, da: $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$, etc.

Sustituyendo en la fórmula [9], se obtiene para el área de la semionda comprendida entre 0 y π:

$$S = \int_0^{\pi} \text{sen } x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$

y para el área de la semionda comprendida entre π y 2π:

$$S' = \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x dx = \left[-\cos x \right]_{\pi}^{2\pi} = -2$$

Si calculamos esta misma integral entre 0 y 2π, obtenemos como valor del área 0. Sin embargo, se ve que el área vale 4.

De este ejemplo deducimos que si en el intervalo dado, la curva está para todo valor de x sobre el eje XX', el área es positiva. Si está para todo valor de x debajo del eje XX', el área es negativa, porque cada uno de los infinitos sumandos $f(x)dx$ que componen la integral definida es negativo, y, por tanto, la suma será negativa. Si lo que

interesa conocer es el resultado de esta suma, se tomará el resultado negativo obtenido; pero si lo que interesa conocer es un área, u otra magnitud que no admite interpretación negativa, se cambia el signo al resultado.

Por fin, si en el intervalo dado la curva corta al eje XX', se averiguan los puntos en que la curva corta al eje OX y se descompone el intervalo de integración en otros parciales, dentro de los cuales la curva quede siempre sobre el eje o bajo el eje. Se halla por separado la integral en cada uno de esos intervalos parciales y luego se suman todos los resultados, tomando los negativos en valor absoluto.

EJEMPLO 3.º *Hallar el área comprendida entre la curva* $y = x^2$ (fig. 97), *el eje* OY *y las rectas* $y = 1$, $y = 9$.

Solución: Basta que hagamos, respecto a la variable y, lo que hacíamos con la variable x. Puesto que antes el área valía

$$\int_{x=a}^{x=b} y\,dx,$$

ahora será

$$\text{área} = \int_{y=1}^{y=9} x\,dy = \int_1^9 \sqrt{y}\,dy = \left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_1^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$$

209. **Area de un recinto limitado por dos curvas.**—Sea un recinto plano limitado por las curvas *ACB* y *ADB* (fig. 99), cuyas ecuaciones respectivas son $y = f(x)$ e $y = h(x)$. Si no conocemos las abscisas de los puntos de intersección *A* y *B*, empezaremos por calcularlas, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones dadas. Luego calcularemos el área del trapecio mixtilíneo *ACBEF* por medio de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, y luego la del trapecio mixtilíneo *ADBEF*, por medio de la integral $\int_a^b h(x)\,dx$. El área pedida es la diferencia de las dos anteriores:

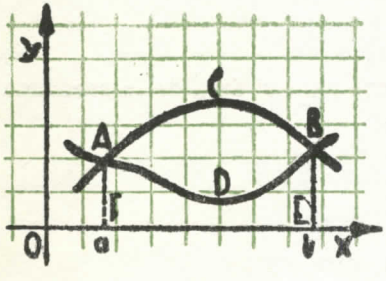


FIG. 99

$$\text{área } ACBDA = \text{área } ACBEF - \text{área } ADBEF$$

EJEMPLO.—*Hallar el área entre las curvas*

$$x^2 = 4y \quad , \quad x^2 = 8y - 4$$

Solución: Fácilmente se halla que las dos parábolas son simétricas

respecto al eje OY, y se cortan en los puntos $(\pm 2, 1)$ (fig. 100). Luego el área del trapecio mixtilíneo correspondiente a la segunda curva vale:

$$\int_{-2}^{2} y\,dx = 2\int_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{8}+\frac{1}{2}\right)dx = 2\left[\frac{x^3}{24}+\frac{x}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{2^3}{12}+2 = \frac{8}{3}.$$

y el correspondiente a la primera curva:

$$2\int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx = 2\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

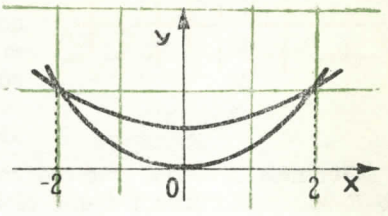


FIG. 100

El área pedida vale:

$$S = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

210. Teorema de la media.—Sea $y = f(x)$ la función que representa la curva de la figura 101. Lo mismo que en el número 205, dividamos el intervalo (a, b) en n partes iguales. La media aritmética y_m de las ordenadas correspondientes a los puntos de división valdrá:

$$y_m = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{n}$$

y multiplicando numerador y denominador por Δx:

$$y_m = \frac{y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x}{n\Delta x} = \frac{\Sigma y_i \Delta x}{b-a}$$

Si hacemos ahora que n tienda a ∞, la media y_m es lo que se denomina *valor medio de la función* $f(x)$ *en el intervalo* (a, b), y vale

$$y_m = \frac{\lim_{n\to\infty} \Sigma y_i \Delta x}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \qquad [10]$$

Evidentemente, y_m está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, y según las propiedades de las funciones continuas en un intervalo (número 82),

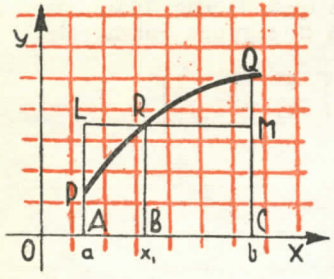


FIG. 101

habrá un valor x_1, intermedio entre a y b, para el cual $f(x_1) = y_m$. Por tanto, de la igualdad [10] se deduce:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_1) \qquad [11]$$

que es la expresión del *teorema de la media*, que dice: *Si* f(x) *es una función continua en el intervalo* (a, b), *existe siempre un valor* x_1 *de dicho intervalo que satisface la igualdad* [11].

Geométricamente este teorema expresa que existe siempre un punto R sobre la curva tal que el área del rectángulo $ACML$ es igual al área del trapecio mixtilíneo $ACQP$.

EJERCICIOS

1. Demuestra que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Halla las siguientes integrales definidas:

2. $\int_4^9 x^{-1/2}dx$

3. $\int_9^{10} (x^2 - x + 1)dx$

4. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

6. $\int_1^4 \frac{dx}{x}$

7. $\int_0^a \frac{dx}{x+a}$

8. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$

9. $\int_0^3 \sqrt{25-3x}\,dx$

10. $\int_0^a (\sqrt{a}-\sqrt{x})^3\,dx$

11. $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

12. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$

14. $\int_0^{\pi/4} \sec^3 x\, dx$

15. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^3}}$

16. $\int_2^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}}$

17. $\int_a^b e^x\, dx$

En los siguientes ejercicios, traza la gráfica correspondiente.

18. Halla el área del triángulo limitado por la recta $y = 2x$, el eje OX y la ordenada $x = 6$. Comprueba el resultado hallando el área por la fórmula de Geometría.

19. Halla el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX y las ordenadas $x = 2$ y $x = 8$. Comprueba el resultado hallando el área por la fórmula de Geometría.

20. Calcula el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y las ordenadas $x = 0$, $x = 3$.

21. Halla el área que está encima del eje x, y debajo de la parábola $y = 4x - x^2$.

22. Halla el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

23. Halla el área limitada por la parábola $x = 8 + 2y - y^2$, el eje OX y las rectas $y = -1$ e $y = 3$.

24. Halla el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, y el eje de las x.

25. Halla el área limitada por la parábola $x = 4 - y^2$, y el eje de las y.

26. Halla el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$, y la recta $y = 2x - 4$.

27. Halla el área limitada por las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

28. Halla el área limitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

29. Halla el área del menor segmento circular determinado por la recta $x = 3$ en el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

30. Halla el área común a los dos círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 4x$.

31. Halla el área del bucle de la curva $y^2 = x^2(4 + x)$.

25

Otras aplicaciones del cálculo integral

211. Volumen de los cuerpos de revolución.—Sea V el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la superficie *ABCD* alrededor del eje OX, siendo $y = f(x)$ la ecuación de la curva *CD* (fig. 102).

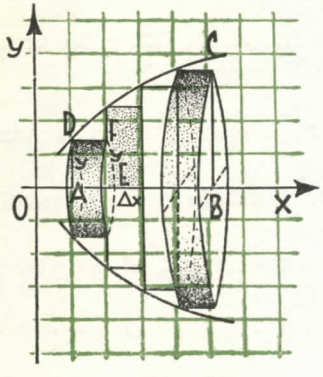


FIG. 102

Si construimos rectángulos dentro de la superficie *ABCD*, como indica la figura, cuando esta superficie gire alrededor del eje OX, cada rectángulo engendrará un cilindro de revolución.

El volumen pedido V es el *límite* de la suma de los volúmenes de estos cilindros cuando el número de éstos, comprendidos entre *A* y *B*, crece indefinidamente, ya que se demostró (núm. 205) que el área *ABCD* era el límite de la suma de los rectángulos cuando su número aumenta indefinidamente.

Luego si designamos las bases de los rectángulos por Δx, y las correspondientes alturas por $y_1, y_2, \ldots$, etc., se tendrá que el volumen del cilindro engendrado por el rectángulo *AEFD* será $\pi y_1^2 \Delta x$, y el volumen pedido:

$$V = \lim_{n \to \infty} (\pi y_1^2 \Delta x + \pi y_2^2 \Delta x + \ldots + \pi y_n^2 \Delta x) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x = \int_a^b \mathbf{y^2 dx} \,, \qquad [1]$$

según la definición de integral definida.

EJEMPLO 1.º *El área limitada por la parábola* $\mathbf{y^2 = 4x}$, *el eje* OX *y la recta* $\mathbf{x = 2}$ *giran alrededor de dicho eje. Hallar el volumen engendrado.*

Solución: Aplicando la fórmula [1]:

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 4x dx = \pi \left[2x^2 \right]_0^2 = 8\pi$$

EJEMPLO 2.º *Hallar el volumen engendrado por la revolución de la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

alrededor del eje OX (fig. 103).

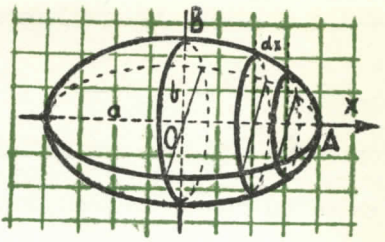


FIG. 103

Solución: Ya que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

y el volumen pedido es doble del volumen engendrado por OAB, tendremos, sustituyendo en la fórmula [1]:

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Para comprobar el resultado, supongamos $b = a$. Entonces

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}$$

es el volumen de una esfera, que es un caso especial del elipsoide.

212. **Volumen de un cuerpo de bases paralelas.**—La figura 104 representa un cuerpo de bases paralelas. La recta OH, trazada perpendicularmente a las bases, y que tomaremos como eje de abscisas, siendo O el origen, corta a la base inferior en A, donde $x = a$, y la base superior en B, donde $x = b$. Supongamos que AB está dividida en n partes iguales, cada una de ellas igual a $\frac{b-a}{n} = \Delta x$, y que por los puntos de división pasan planos paralelos a las bases. Es evidente que las áreas de estas secciones dependerán de x.

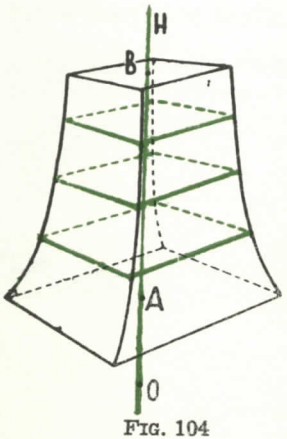


FIG. 104

Sea A_0 el área de la base inferior del cuerpo, A_1 la de la primera sección paralela a la base, A_2 la de la segunda, y así sucesivamente, siendo A_{n-1} la penúltima, es decir, la inmediatamente precedente a la base superior. Entonces, $A_0 \Delta x$ representa el volumen de un prisma de base A_0

y altura Δx; $A_1 \cdot \Delta x$ representa el volumen de un prisma cuya base es A_1 y la altura Δx, y así sucesivamente. Es evidente que

$$A_0\Delta x + A_1\Delta x + A_2\Delta x + \ldots + A_{n-1}\Delta x = \sum_0^{n-1} A_i\Delta x$$

representa una aproximación del volumen del cuerpo, y que el límite de esta suma, cuando n crece indefinidamente, nos da el volumen exacto del cuerpo; es decir, el volumen pedido es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_0^{n-1} A_i\Delta x = \int_a^b \mathbf{A(x)dx} \ , \qquad [2]$$

ya que el valor de A_i es una función de x que representamos por $A(x)$.

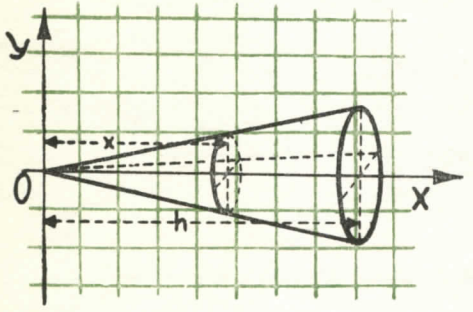


FIG. 105

Para hallar el valor de esta integral es necesario expresar A en función de x. Es un problema de Geometría que debe ser resuelto para cada caso. Es claro que la deducción precedente es aún válida si la base superior se reduce a un punto, es decir, si el cuerpo es tangente a un plano paralelo a su base.

Del mismo modo pueden reducirse a un punto las dos bases.

EJEMPLO.—*Hallar el volumen de un cono, de altura* h, *y base circular de radio* r (fig. 105).

El área de la base del cono $= \pi r^2$. Si llamamos A(x) el área de la sección perpendicular al eje OX, y a distancia x, por un teorema de Geometría tenemos:

$$\frac{A(x)}{\pi r^2} = \frac{x^2}{h^2}$$

De donde

$$A(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2$$

Y sustituyendo en la fórmula [2]:

$$V = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{3h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Luego, para el cono de base circular, el *volumen es igual a un tercio del área de la base por la altura.*

De la fórmula [2] se deduce inmediatamente el siguiente

TEOREMA DE CAVALIERI: *Si en dos cuerpos de igual altura las secciones correspondientes producidas por planos paralelos y a igual distancia de sus respectivas bases son equivalentes, los cuerpos tienen el mismo volumen.*

En efecto, entonces la función $A(x)$ es la misma para ambos cuerpos; son también iguales los límites de integración de la fórmula [2], y por tanto, el volumen de los dos cuerpos dado por dicha fórmula es el mismo.

213. **Una aplicación física de las integrales: movimiento uniformemente variado.**—La integración nos va a permitir demostrar de un modo científico y completo las fórmulas del movimiento variado uniformemente, que en la Física de Sexto Curso se demostraron de un modo más elemental.

Movimiento uniformemente variado es aquel en que la aceleración a es constante.

Según que a sea positivo o negativo, el movimiento será acelerado o retardado.

Siendo la aceleración la derivada de la velocidad respecto al tiempo (número 156), ésta, a su vez, será la primitiva de la aceleración respecto al mismo. O sea, de la fórmula:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

deducimos:

$$dv = a\,dt \quad ; \quad v = \int a\,dt = at + C \qquad [3]$$

puesto que a es constante. Haciendo en esta fórmula $t = 0$ y llamando v_0 a la *velocidad inicial,* esto es, a la velocidad del móvil en el instante $t = 0$, sale:

$$v_0 = a \cdot 0 + C$$

Luego:

$$C = v_0$$

valor que, sustituido en la fórmula [3], da:

$$\mathbf{v = at + v_0} \qquad [4]$$

que es la fórmula de la velocidad en este movimiento. Por otra parte, según el número 155, sabemos que:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Luego:

$$s = \int v dt = \int (at + v_o) dt = \frac{at^2}{2} + v_o t + C \qquad [5]$$

Dado que se suele tomar como punto de origen de abscisas la posición del móvil en el instante $t = 0$, será $s = 0$ para $t = 0$. Sustituidos estos valores en la fórmula [5], se obtiene:

$$0 = C$$

$$s = \frac{at^2}{2} + v_o t \qquad [6]$$

es la fórmula del espacio en el movimiento considerado.

Casos particulares: 1.° Si $v_o = 0$ (sin velocidad inicial):

$$v = at \quad ; \quad s = \frac{at^2}{2}$$

2.° Si la aceleración es negativa (movimiento retardado):

$$v = v_o - at \quad ; \quad s = v_o t - \frac{at^2}{2}$$

214. Otra aplicación física de las integrales: trabajo de una fuerza.—El trabajo, que es el producto de la fuerza que actúa por el camino que recorre su punto de aplicación en la dirección de la fuerza, puede representarse por el área de un rectángulo cuya base sea el camino rectilíneo recorrido y cuya altura sea la fuerza constante.

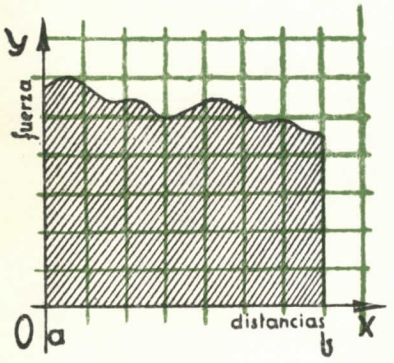


FIG. 106

Si la fuerza es variable, será una función del espacio, que podemos representar gráficamente (fig. 106), llevando ordenadas que midan la intensidad variable de la fuerza para cada posición x del móvil sobre el eje OX. El intervalo (a, b) sobre éste, dividámoslo en n partes iguales a Δx. El trabajo elemental en cada intervalo Δx será $f(x)\Delta x$. La suma de los trabajos elementales en todos los intervalos parciales tiene un límite cuando dichos intervalos

tienden hacia cero. Ese límite es la integral definida y se llama *trabajo de la fuerza* W; o sea, tiene por expresión

$$W = \int_a^b f(x)\,dx \qquad [7]$$

y viene representado por el área del trapecio mixtilíneo.

EJEMPLO.—*Hallar el trabajo que realiza la carga eléctrica positiva unidad al pasar del punto* A *al* B, *por la acción del campo eléctrico creado por una carga positiva* + Q, *concentrada en un punto* (fig. 107).

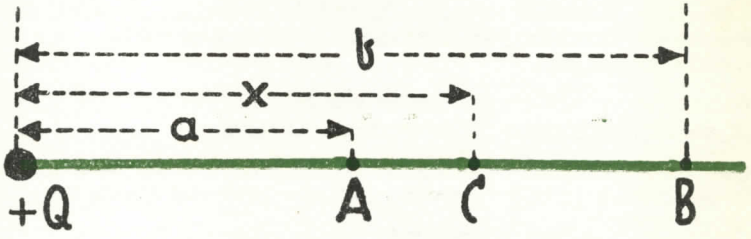


FIG. 107

Solución.—Llamemos a y b las distancias de A y B hasta Q. Sea C un punto cualquiera del segmento AB, y sea x su distancia a Q. La carga $+Q$ repele a la carga $+1$, situada en C, con la fuerza $f = k\dfrac{Q \cdot 1}{x^2} = k\dfrac{Q}{x^2}$. Dicha fuerza es por tanto variable en cada punto del segmento AB. El trabajo total se obtendrá aplicando la fórmula [7]:

$$W = k\int_a^b \frac{Q}{x^2}\,dx = kQ\int_a^b x^{-2}dx =$$

$$= kQ\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_a^b = kQ\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b =$$

$$= k\frac{Q}{a} - k\frac{Q}{b}$$

Según se sabe por la Física, este trabajo se denomina *diferencia de potencial entre* A *y* B. Suponiendo que este último punto se traslada al infinito, entonces $b = \infty$, y por tanto:

$$W = k\frac{Q}{a}$$

Este trabajo mide el *potencial del punto* A. Como se ve, con esta demostración completamente rigurosa se obtiene el mismo resultado que con la aproximada usada en Física, para alumnos que no conocen la integración.

EJERCICIOS

1. Halla el volumen de la esfera engendrada por la rotación del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro.

2. Halla, por integración, el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor del eje OX del área limitada por $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

3. Calcula el volumen engendrado por la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = x$, y la recta $x = 2$ alrededor del eje de las x.

4. Calcula el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ alrededor de esta recta.

5. Calcula el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ alrededor del eje de las y.

6. Calcula el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de las x alrededor de la recta $y = 6$.

7. Calcula, por integración, el volumen del tronco de cono, cuyos radios de las bases son r y R, y la altura h.

8. Calcula el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ alrededor de esta recta.

9. Halla el volumen del toro engendrado por la rotación del círculo $x^2 + y^2 = 4$ alrededor de la recta $x = 3$.

10. Halla el volumen engendrado cuando el área plana, limitada por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $x + y - 3 = 0$ gira alrededor de esta recta.

11. A 1/4 de cilindro de revolución, de eje OZ y diámetro $2a$, se le corta normalmente al eje OZ por el plano XOY, y con inclinación de 45° con el plano XOC. Halla el volumen limitado por ambos planos.

12. Un cuerpo tiene una base circular, de radio 4 unidades. Halla el volumen del cuerpo si toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero.

Aprobado el 23-II-68
B. O. M. E. y C. del 7-III-68
66 ptas. 1974

Ediciones S. M. GENERAL TABANERA, 39-MADRID-25